

考虑“ π 凝聚”的影响,计算高能电子 与 ^{40}Ca 核弹性散射截面

赵叔平
(中国科学技术大学)

摘 要

利用 Migdal 关于“ π 凝聚”的理论结果,确定“ π 凝聚”对 $N=Z$ 核电荷分布的影响. 计算高能电子与 ^{40}Ca 核弹性散射的微分截面. 计算结果与实验数据可以较好的符合.

一、电子与原子核弹性散射实验的简单情况

电子对原子核散射的研究,现在已经成为核电荷分布知识的主要来源. 例如,费米型的分布^[1]

$$\rho_1(r) = \rho_0(1 + Wr^2/R^2)(1 + e^{(r-R)/a})^{-1}, \quad (1)$$

是较早的由低能电子对原子核弹性散射实验所唯象定出的电荷密度的形式之一, W , a 是由实验选择的参数, 因原子核的种类和电子的入射能量而异. 但是随着实验技术的发展, 入射电子的能量不断增高, 发现对能量较高的电子, 使用(1)式的费米型电荷分布所计算出的弹性散射截面值与实验资料符合得并不好. 以 ^{40}Ca 核与电子的弹性散射为例, 当入射电子的能量约为 250 MeV 和 500 MeV 时, 用(1)式所算出的结果与实验还符合得较好. 但当电子的能量达到了 750 MeV 左右时, 散射角超过 35° 以上的数据, 与实验偏差较大^[2].

为了与实验符合, 有人尝试在 $\rho_1(r)$ 的基础上迭加一个附加的电荷密度 $\Delta\rho(r)$ ^[2,3], 例如对 ^{40}Ca 核, $\Delta\rho(r)$ 的形式是^[2]

$$\Delta\rho(r) = \frac{ZeApq_0^3}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\sin q_0 r}{q_0 r} + \frac{p^2}{2q_0^2} \cos q_0 r \right\} e^{-p^2 r^2/4}, \quad (2)$$

$\rho_1(r) + \Delta\rho(r)$ 的分布示于图 1. 这是个比较理想的电荷密度. 用它来计算截面, 对 750 MeV 的入射电子的情况, 结果是满意的.

但是, 需要注意的是, $\Delta\rho(r)$ 的形式因各种核是不同的, 而且除了 $\rho_1(r)$ 中的唯象参数外, 又增加了 A , p 和 q_0 三个待定的参数. 除此之外, 对好几种核, 如 ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{39}K 等等, 采用 $\rho_1 + \Delta\rho$ 型分布, 还有下面两个特点

1. 在 $r \rightarrow 0$ 时 $\rho(r) = \rho_1(r) + \Delta\rho(r)$ 有一个明显的峰(中央峰)^[2,3], 图 1 给出 ^{40}Ca 核的中央峰值

$$\rho(0) = 0.0908e/\text{fm}^3 \quad (3)$$

2. 在电子的转换动量 $q \sim 3\text{fm}^{-1}$ 的附近, 实验微分截面为一个极小值^[4].

对这两个特点, 目前没有一个适当的理论解释. 有人曾用壳模型来加以说明, 但没有成功^[2,4].

二、 π 凝聚对原子核电荷分布的影响

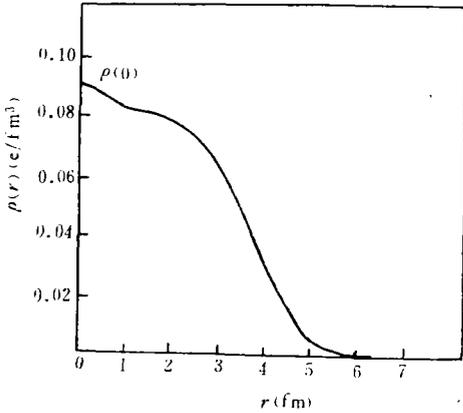


图 1 ^{40}Ca 核电荷分布^[2] $\rho(0) = 0.0908e/\text{fm}^3$ 曾经得出以下的结论:

对 $N = Z$ 的核物质, 当核子密度 $n > n_c = 0.3$ 时(今后均取 π 介子单位制 $C = \hbar = m_\pi = 1$), π 介子能量平方的一个分支成为负值 $\omega^2 < 0$ (见图 2), 这表示核物质系统的不稳定性, 应同时出现 π^+ , π^- , π^0 三种 π 介子. 因为 π 介子不受泡利原则的限制, 因此在最低能态上可以大量积累, 这就是“ π 凝聚”现象. 因为阈密度 n_c 比正常核密度 $n_0 \cong 0.5$ 还要小, 所以 Migdal 预言, 在一般的正常原子核里就可能存在着 π 介子的凝聚现象.

本文以 Migdal 的结论为出发点, 试图讨论一下 π 凝聚对核子密度分布的影响. 用所求得的电荷密度计算电子被原子核弹性散射的电形状因子; 并用波恩近似关系式, 计算高能电子与 ^{40}Ca 核弹性散射的微分截面, 最后和实验数据进行了比较.

第一步求 π 凝聚所引起的原子核电荷分布.

对凝聚 π 介子之间的相互作用, 我们选择 Migdal 所采用的形式^[5]

$$H' = \frac{\lambda}{4} \int \varphi^4 dV, \quad (4)$$

φ 为凝聚 π 介子场, λ 为相互作用常数, $\lambda > 0$.

对静止的 π 凝聚, π 系统的总哈密顿为

$$H = \int \left(\frac{\omega_0^2 \varphi^2}{2} + \frac{\lambda \varphi^4}{4} \right) dV. \quad (5)$$

其中 ω_0 为凝聚 π 介子的最小能量, K_0 是与 ω_0 相对应的动量. Migdal 的结果给出^[6]

$$K_0 \sim 2.2 \cong 1.5\text{fm}^{-1}. \quad (6)$$

尝试取驻波型的凝聚 π 介子场

$$\varphi_a(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} a \sin(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r}), & r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (7)$$

在对“ π 凝聚”理论的研究中, Migdal^[5]

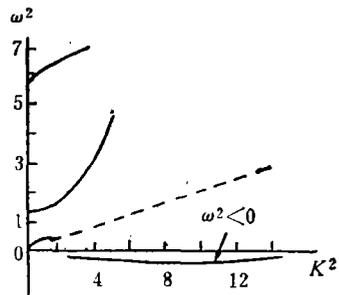


图 2 Migdal 的 $N = Z$ 时 π 介子能量谱 ($n = n_0 \cong 0.5 > n_c$) 在 $2 \leq K^2 \leq 15$ 时, $\omega^2 < 0$, 有 π^+ , π^- , π^0 同时出现

R 是原子核的半径, $\alpha = 1, 2, 3$. 并有

$$\varphi_{\alpha^{\pm}} = \frac{\varphi_1 \pm i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_{\alpha^0} = \varphi_3.$$

由于凝聚基态的能量应相当于 H 对 φ^2 取极小值, 这样可有 $a^2 = -\omega_0^2/\lambda$.

对凝聚 π 介子与核子之间, 取赝矢耦合的相互作用

$$\mathcal{H}'_{\pi N} = if\bar{\psi}r_\nu\tau_\alpha\psi\partial_\nu\varphi_\alpha,$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad f \simeq 1.0, \quad \nu = 1, 2, 3, 4.$$

ψ_p, ψ_n 为质子、中子波函数, r_ν 为狄喇克矩阵, τ_α 为核子的同位旋算符. 对核子做非相对论的近似, 引入

$$\tau_{\pm} = \frac{\tau_1 \pm i\tau_2}{2},$$

则有

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{\pi N} \simeq & \sqrt{2}f\psi_p^*\sigma_\alpha\psi_n\nabla_\alpha\varphi_{\pi^+} + f\psi_p^*\sigma_\alpha\psi_p\nabla_\alpha\varphi_{\pi^0} + \sqrt{2}f\psi_n^*\sigma_\alpha\psi_p\nabla_\alpha\varphi_{\pi^-} \\ & - f\psi_n^*\sigma_\alpha\psi_n\nabla_\alpha\varphi_{\pi^0}. \end{aligned} \quad \sigma_\alpha \text{---核子的自旋算符} \quad (8)$$

近似把 $\mathcal{H}'_{\pi N}$ 视为作用在核子上的位能 $V(\mathbf{r})$, 则核子的能量

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2(\mathbf{r})}{2m} + V(\mathbf{r}). \quad (9)$$

设核子的自旋在 $\nabla\varphi$ 方向上投影为 $\pm \frac{1}{2}$ 时的动量、能量、密度分别为 $\mathbf{p}_{\pm}(\mathbf{r}), E_{\pm}(\mathbf{r})$

和 $n_{\pm}(\mathbf{r})$, 那么在空间 \mathbf{r} 处核子的密度为

$$n(\mathbf{r}) = n_+(\mathbf{r}) + n_-(\mathbf{r}), \quad (10)$$

且由费米气体近似关系式, 对中子、质子都有

$$n_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_{\pm}^3(\mathbf{r})}{3\pi^2}, \quad (11)$$

近似取 $E_{\pm}(\mathbf{r})$ 等于 π 凝聚发生后核子的费米能量, 它可以由粒子数守恒求出. 由 (7) — (11) 式, 在保留到凝聚 π 介子场振幅的二阶项的情况, 可得出 π 凝聚所调制的原子核的核子密度为^[7]

$$n(\mathbf{r}) = \frac{n_0}{2} [1 + b \cos(2\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})\theta(R - r)], \quad (12)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

中子与质子的密度都具有 (12) 式的形式, 它们是以 $2K_0$ 为周期变化的函数. b 与 a^2 成比例, 此外 b 还与 π 介子的极化算子 $\Pi(K, \omega)$ ^[8] 有关, 由于 $\Pi(K, \omega)$ 形式很繁杂, 直接求 b 很困难, 这里不准备这样来计算它, 而是试图通过实验数据用唯象方法简单定出 (见下面两节的讨论).

由于质子密度具有 (12) 式的周期的分布, 原子核的电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{en_0}{2} [1 + b \cos(2\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})\theta(R - r)].$$

考虑 \mathbf{K}_0 方向的任意性, 对空间求平均后, 得

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}) &= \rho_0 + \rho_2(\mathbf{r}), \quad \rho_0 = \frac{en_0}{2}, \\ \rho_2(\mathbf{r}) &= \rho_0 b \frac{\sin(2K_0 r)}{2K_0 r} \theta(R-r).\end{aligned}\quad (13)$$

$\rho_2(\mathbf{r})$ 就是由于 π 凝聚的影响所引起的核电荷密度.

本文设想: 如果在正常核里存在着 π 介子凝聚的话, 那末可以这样选择原子核的电荷密度——在费米型电荷密度 $\rho_1(r)$ 上, 加上 π 凝聚引起的电荷密度 $\rho_2(r)$, 即

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_1(\mathbf{r}) + \rho_2(\mathbf{r}) = \rho_0 \left[(1 + W r^2/R^2)(1 + e^{(r-R)/a})^{-1} + b \frac{\sin(2K_0 r)}{2K_0 r} \theta(R-r) \right]. \quad (14)$$

以 (14) 式的 $\rho(r)$ 做为核电荷密度, 对电子与原子核的弹性散射截面加以计算.

三、计算电形状因子

对电子和原子核的弹性散射, 在一级波恩近似下, 微分截面可写成^[9]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[F_L^2(q) + \frac{1}{2} \frac{\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} F_T^2(q) \right], \quad (15)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2}{4E_0^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2E_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}. \quad (16)$$

式中, E_0 ——电子的入射能量, θ ——电子在实验室系内的散射角, M ——原子核的质量, $\alpha = \frac{1}{137}$ ——精细结构常数, $q^2 \simeq 4E_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ——电子的转换动量. $F_L(q)$ 称为电形状因子, 是一个径向的形状因子, 主要是由于原子核的电荷分布及电四极矩的作用. $F_T(q)$ 称为磁形状因子, 是横向的形状因子, 主要为磁偶极矩的贡献. $F_T(q)$ 只在接近 180° 角时的大角度散射时才有较大的贡献, 在其它角度时, 与 $F_L(q)$ 的贡献相比, 可以忽略. 电形状因子 $F_L(q)$ 与原子核的电荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ 的关系为^[10]

$$F_L(q) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \sin qr dr. \quad (17)$$

以 (14) 式的 $\rho(r)$ 代入, 可计算相应的电形状因子

$$F_L(q) = F_{L1}(q) + F_{L2}(q), \quad (18)$$

$F_{L2}(q)$ 很容易算出来, 只要将 (13) 式的 $\rho_2(r)$ 代入 (17) 式, 得

$$F_{L2}(q) = \frac{\pi \rho_0 b}{K_0} \left[\frac{\sin(q - 2K_0)R}{q - 2K_0} - \frac{\sin(q + 2K_0)R}{q + 2K_0} \right]. \quad (19)$$

将 (1) 式的费米电荷分布 $\rho_1(r)$ 代入 (17) 式可算出 $F_{L1}(q)$. 这个计算过程比较麻烦, 这里不予赘述. 计算中, 主要利用了下面的公式:

如果令 $f(r-R) = (1 + e^{(r-R)/a})^{-1}$, 则对任意的函数 $h(r)$, 有^[11]

$$\int_0^\infty \left(\frac{dh(r)}{dr} \right) f(r-R) dr = - \left\{ \pi a \frac{d}{dR} \left[\csc \left(\pi a \frac{d}{dR} \right) \right] \right\} h(R)$$

及

$$\int_0^\infty r \sin qrf(r-R) dr = - \frac{\partial}{\partial q} \int_0^\infty \cos qrf(r-R) dr,$$

$$\int_0^\infty r^3 \sin qrf(r-R) dr = \frac{\partial^3}{\partial q^3} \int_0^\infty \cos qrf(r-R) dr.$$

特别是对电子的转换动量较大 ($q > 2\text{fm}^{-1}$) 时, 有

$$\sin h(\pi a q) \simeq \cos h(\pi a q).$$

利用这些公式可近似求得

$$F_{L1}(q) = [q \sin h(\pi a q)]^{-1} (B_1 \sin qR + B_2 \cos qR), \quad (20)$$

$$B_1 = 4\pi\rho_0(\pi^2 a^2 + 3\pi^2 a^2 W - \pi^4 a^4 W R^{-2}), \quad (21)$$

$$B_2 = 4\pi\rho_0(3\pi^3 a^3 W R^{-1} - \pi a R - \pi a R W),$$

注意这里与文献 [2, 3] 的结果之间的差别. 在文献 [2, 3] 中, $\Delta\rho(r)$ 的形式是因核的不同而改变的, 因此对各种核的电荷分布, 需要许多不同形式的 $\Delta\rho(r)$. 本文是把 π 凝聚所引起的电荷密度做为附加的电荷密度的; 因此对任何 $N = Z$ 核, (14)、(20)、(21) 式都具有相同的形式.

四、757.5 MeV 电子与 ^{40}Ca 核弹性散射微分截面的计算

利用前两节所得的公式, 这一节我们定量计算入射电子能量为 757.5 MeV 时, 与 ^{40}Ca 核弹性散射的微分截面. 参数 R, a, W 取自文献 [3]

$R = 3.766 \pm 0.023, (\text{fm})$ $a = 0.586 \pm 0.005, (\text{fm})$ $W = -0.161 \pm 0.023.$ (22)
 ρ_0 由 $\rho_1(r)$ 的归一化确定^[22], 即由

$$Z = \int \rho_1(r) dr = 4\pi\rho_0 \int r^2 (1 + W r^2 / R^2) (1 + e^{(r-R)/a})^{-1} dr$$

给出

$$\rho_0 = 0.0839_{-0.0020}^{+0.0030}. (e/\text{fm}^3) \quad (23)$$

对于参数 b 的确定, 我们避免复杂的直接计算, 而是利用由实验唯象定出的电荷密度曲线 (图 1) 来定出. 我们假定 (14) 式的电荷密度符合图 1 的曲线. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \max \left(\frac{\sin x}{x} \right), \quad (24)$$

则由于在 (13) 式中, $\rho_2(r)$ 包含了 $\frac{\sin 2K_0 r}{2K_0 r}$ 部分, 所以当 $r \rightarrow 0$ 时, $\rho_2(r)$ 应取极大值, 这刚好解释了许多核的电荷分布中的中央峰的存在^[2,3]. 而且由 (22) 式 R, a 的数据

$$e^{-R/a} \simeq e^{-6} \rightarrow 0,$$

所以在 $r \rightarrow 0$ 时, $\rho(0)$ 应为

$$\rho(r \rightarrow 0) = \rho_0(1 + b),$$

从而由中央峰值 $\rho(0)$, 可定出参数 b 值, 由 (3) 式

$$\rho(0) = 0.0908 e/\text{fm}^3$$

及(23)式 ρ_0 的值,有

$$b = \frac{\rho(0)}{\rho_0} - 1 = 0.082^{+0.040}_{-0.025} \quad (25)$$

由(22)、(23)、(25)所给的参数值及(18)、(19)、(20)、(21)的电形状因子公式,代入弹性散射微分截面公式(15),就可以计算在各种散射角 θ 下的截面的数值. 对于小角度、低转换动量的情况,从(19)式可以看出, π 凝聚引起的电荷密度 $\rho_2(r)$ 对截面的贡献很小. 而费米型分布在小角度时,可以与实验较好的符合^[2-4]. 因此这里的散射角度从 34° 开始, q 的范围为 $2.20 \text{ fm}^{-1} < q < 3.40 \text{ fm}^{-1}$.

将结果列于表1. 在表1中还与文献[3]所给的实验数据做了比较. 并把表的结果绘于图3.

表1 757.5 MeV 电子与 ^{40}Ca 核弹性散射微分截面

θ (度)	$\left(\frac{d\sigma}{dQ}\right)_{\text{理论}}$ (mb/sr)	$\left(\frac{d\sigma}{dQ}\right)_{\text{实验}}$ (mb/sr)
34.08	0.855×10^{-5}	$0.890 \times 10^{-5} \pm 0.11 \times 10^{-6}$
36.08	0.637×10^{-5}	$0.630 \times 10^{-5} \pm 0.80 \times 10^{-6}$
38.08	0.286×10^{-5}	$0.280 \times 10^{-5} \pm 0.40 \times 10^{-6}$
40.08	0.106×10^{-5}	$0.110 \times 10^{-5} \pm 0.30 \times 10^{-6}$
42.08	0.264×10^{-6}	$0.285 \times 10^{-6} \pm 0.65 \times 10^{-7}$
44.08	0.487×10^{-7}	$0.450 \times 10^{-7} \pm 0.16 \times 10^{-8}$
45.08	0.259×10^{-7}	$0.260 \times 10^{-7} \pm 0.60 \times 10^{-8}$
46.08	0.130×10^{-7}	$0.190 \times 10^{-7} \pm 0.60 \times 10^{-8}$
47.08	0.614×10^{-8}	$0.560 \times 10^{-8} \pm 0.14 \times 10^{-8}$
48.08	0.479×10^{-8}	$0.420 \times 10^{-8} \pm 0.20 \times 10^{-8}$
49.08	0.458×10^{-8}	$0.395 \times 10^{-8} \pm 0.17 \times 10^{-8}$
50.08	0.568×10^{-8}	$0.640 \times 10^{-8} \pm 0.31 \times 10^{-8}$
52.08	0.391×10^{-8}	$0.480 \times 10^{-8} \pm 0.20 \times 10^{-8}$

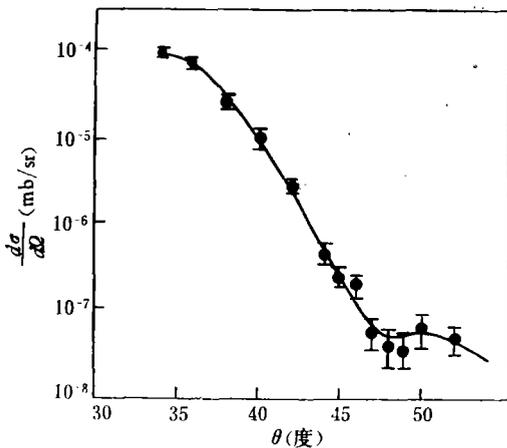


图3 757.5 MeV 电子与 ^{40}Ca 核弹性散射微分截面曲线由电荷密度 $\rho = \rho_1 + \rho_2$ (见(14)式)计算得到. 实验数据取自文献[3]

五、一点讨论

可以看出,考虑了 π 凝聚的影响之后,可以较圆满地解释第一节所指出的实验特点. 对于第一个特点,在求参数 b 的时候,由于在 $r \rightarrow 0$ 时, $\rho_2(r)$ 应取极大值,从而很好地解释了原子核电荷密度中央峰的出现. 其次,由(19)式及(24)式,有

$$\lim_{q \rightarrow 2K_0} \frac{\sin(q - 2K_0)R}{q - 2K_0} = R.$$

且由(6)式给出的 K_0 值, $K_0 \approx 1.5 \text{ fm}^{-1}$, 因此当 $q \approx 3 \text{ fm}^{-1}$ 时, F_{L2} 应取极大值,因为在这里, F_{L1} 与 F_{L2} 是符号相反的,就使

$q \approx 3\text{fm}^{-1}$ 附近, 微分截面为极小值, 这正是电子被原子核弹性散射实验的第二个特点。

本文计算截面的特点在于, 一方面从物理上考虑了 π 凝聚对原子核电荷分布的影响, 可以较好地解释截面在 3fm^{-1} 附近的极小值; 另一方面与前人的工作相比^[2,3], 唯象参数较少, 在费米型分布的原有参数基础上, 只增加了一个由实验确定的参数 b , b 本身有明确的物理意义, 它与 π 凝聚场的二阶振幅成比例。参数的减少可使截面的数字计算较简单。另外, 本文所用的公式具有一定的普遍性, 对于 $N = Z$ 核都适用。

从表 1 与图 3 的结果表明, 对于 757.5 MeV 电子与 ^{40}Ca 核的弹性散射微分截面, 在实验误差所允许的范围内, 理论计算的截面与实验数据是符合的。因此, 从一定意义上来说, 这是对 π 凝聚理论的支持。

参 考 文 献

- [1] J. Bellicard, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 527.
- [2] H. Uberall, *Electron Scattering from Complex Nuclei*, part A, p. 373—379.
- [3] B. B. P. Sinha et al., *Phys. Rev.*, **C7** (1973), 1930.
- [4] I. Sick et al., *Phys. Lett.*, **53B** (1974), 15.
- [5] A. Б. Мигдал, *Ж. Э. Т. Ф.*, **66**(1974), 443.
- [6] A. B. Migdal, *Phys. Lett.*, **52B** (1974), 264.
- [7] 赵叔平, π^0 凝聚对原子核物质密度与自旋分布的可能影响, 待发表。
- [8] A. B. Migdal, *Phys. Rev. Lett.*, **31** (1973), 247.
- [9] R. G. Arnold et al., *High Energy Physics and Nuclear Structure*, (1975), 373.
- [10] 同[2], p. 126.
- [11] 同[2], p. 130.
- [12] A. 玻耳, B. R. 莫特逊, 原子核结构(中文版), 科学出版社, p. 178.

CALCULATION OF THE ELASTIC-SCATTERING CROSS-SECTION OF ENERGETIC ELECTRON BY ^{40}Ca NUCLEUS IN CONSIDERATION OF THE INFLUENCE OF “PION CONDENSATION”

ZHAO SHU-PING

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

Using Migdal's theoretical results of “pion Condensation”, the influence of “ π condensation” on the distribution of charge of $N=Z$ nucleus is determined. The elastic-scattering differential cross-section of energetic electron by ^{40}Ca nucleus is also calculated. The results of our calculations agree better with the experimental data.