第4卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 5
1980年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1980

设计低能强束流输运系统的一种计算方法

魏开煜 林震华
(中国科学院高能物理研究所)

摘　　要

本文阐述了一种计算强束流输运系统的逐步近似方法，提出了计算任意多个聚束器系统的普遍公式.

一、引　　言

在高能质子同步加速器的低能束流输运系统中，采用多聚束器系统是一个值得进一步研究的问题. 例如,理论和实践都已证明,双聚束器的聚束效率要比单聚束器高10—20%. 但是,由于束流空间电荷效应的影响,既使在双聚束器情况下,可调参数的数目仍不足以消除空间电荷力所引起的聚束效率随着束流强度增长而下降的现象. 于是人们认为采用三个或更多个聚束器的必要性是存在的，它有可能完全补偿空间电荷对聚束效率的影响. 然而迄今为止，在公开的文献和内部交换资料中，只看到了西欧核子研究中心(CERN)采用第三个基波聚束器的报告，却没有看到超过两个聚束器的计算公式和计算循环方法方面的文章. 本文在文献[1]所提出的空间电荷模型的基础上作了进一步推广,提出了一套计算任意多个各种谐波聚束器系统的普遍公式.

除了提出上述普遍公式外,更主要的是本文构造了一个包括束流横向聚焦和匹配,纵向聚束和注入的联合计算循环方法. 这个循环方法中包括了束流纵向和横向空间电荷效应的联合逐步近似计算. 这种完整的计算循环方法在一般专题文献中很难看到. 读者可以直接利用本文提供的计算循环去用各种电子计算机语言编写设计低能强流输运系统的计算程序.

利用本文所给出的普遍公式可以计算单聚束器，双聚束器（包括基波和谐波双聚束器),三聚束器……,以及多间隙聚束器等多种聚束系统.

二、束流空间电荷模型和空间电荷力

为了描述粒子在输运系统中的运动，我们取系统的中心轨道为纵坐标轴 Z，束流输运方向为正,以X和Y分别表示粒子在水平和垂直方向相对于中心轨道的偏离.

在质子同步加速器的低能输运系统中,束流的空间电荷效应在聚束前后是不同的.假

本文1979年4月20日收到.

定系统有多个电场为正弦波的聚束器,我们取沿中心轨道运动,动量等于设计值并且在电场的零相位通过聚束间隙的粒子为标准粒子,它的纵坐标为 Z_c,其他粒子与标准粒子的纵向位置之差为 $\bar{z} = Z - Z_c$,假定第 i 个聚束间隙的长度远小于聚束漂移距离,那么当忽略 $\bar{z}$ 在间隙中的微小变化时,可以导出粒子在通过此间隙前后纵向运动状态的变化为

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_{i\text{out}} \\ \bar{z}'_{i\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{i\text{in}} \\ -\dfrac{eV_i}{m_0c^2\gamma^3\beta^2}\sin\left(2\pi\dfrac{\bar{z}_{i\text{in}}}{\beta\lambda_i} + k_i\pi\right) + \bar{z}'_{i\text{in}} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

式中 V_i 为有效聚束电压,e 和 m_0 分别为粒子的电荷和静质量,λ_i 为电场波长,k_i 为整数,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

v 为束流输运速度,c 为光速. 下标"in"和"out"分别表示间隙入口和出口. "$'$"表示 $\dfrac{d}{dZ_c}$. 由于(2.1)的作用,原来为连续的束流,在通过第一个聚束间隙($i=1$)之后就以长度 $\beta\lambda_1$ 为单元开始聚束. 根据文[1]中所提出的空间电荷模型,在第一个聚束间隙出口以前,可以把束流看做一个截面为椭圆形的均匀无限长带电柱. 粒子所受的空间电荷力可以写为

$$f_x^{(1)} = \frac{eI}{\varepsilon_0\pi\gamma^2\beta ca(a+b)}X, \tag{2.2}$$

$$f_y^{(1)} = \frac{eI}{\varepsilon_0\pi\gamma^2\beta cb(a+b)}Y. \tag{2.3}$$

这里 I 是束流强度,ε_0 为真空介电常数,a 和 b 分别为束流在 x 和 y 方向的半包络.

在第一个聚束间隙出口以后的聚束漂移段中,可以把束流的空间电荷模型理想化为密度为 ρ_1 的均匀带电椭球和密度为 ρ_2 的均匀无限带电柱的叠加. 假定柱段 $|\bar{z}| \leqslant \bar{z}_p$ 中的粒子是可以被直线加速器捕获的有用部分,将这段柱等效为半轴为 a_x, a_y, a_z 的椭球,我们在文献[1]的基础上作了适当变换,得到在聚束漂移段中粒子所受的空间电荷力为

$$f_x^{(2)} = \left[\frac{\rho_1-\rho_2}{\varepsilon_0\gamma^2}\mathscr{M}_x + \frac{\rho_2}{\varepsilon_0\gamma^2}\frac{a_y}{a_x+a_y}\right]X, \tag{2.4}$$

$$f_y^{(2)} = \left[\frac{\rho_1-\rho_2}{\varepsilon_0\gamma^2}\mathscr{M}_y + \frac{\rho_2}{\varepsilon_0\gamma^2}\frac{a_x}{a_x+a_y}\right]Y, \tag{2.5}$$

$$f_z^{(2)} = \frac{\rho_1-\rho_2}{\varepsilon_0}\mathscr{M}_z\bar{z}, \tag{2.6}$$

式中 $\mathscr{M}_x, \mathscr{M}_y, \mathscr{M}_z$ 为椭球的形状因子. ρ_1 和 ρ_2 的表示式为

$$\rho_1 = \frac{\alpha_{x1}\alpha_{y1}a_{z1\text{out}}T_{rf1}I}{\pi a_xa_ya_z\beta\lambda_1}, \tag{2.7}$$

$$\rho_2 = \frac{\left(\prod_{i=1}^{J}\alpha_{xi}\alpha_{yi}\right)T_{rf1}I}{\pi a_xa_y\beta\lambda_1}\left(\frac{1-\dfrac{4\alpha_{x1}\alpha_{y1}a_{z1\text{out}}}{3\beta\lambda_1}}{1-\dfrac{4a_z\prod_{i=1}^{J}\alpha_{xi}\alpha_{yi}}{3\beta\lambda_1}}\right), \tag{2.8}$$

式中 T_{rf1} 为第一个聚束器的电场周期. a_{z1out} 为 a_z 在第一聚束间隙出口的值. 等效椭球半轴与有用柱段半轴之间的关系为

$$a_x = \left(\prod_{i=1}^{J} \alpha_{xi}\right) a, \quad a_y = \left(\prod_{i=1}^{J} \alpha_{yi}\right) b, \quad a_z = \frac{3\bar{z}_p}{2\prod_{i=1}^{J} \alpha_{xi}\alpha_{yi}}. \tag{2.9}$$

这里 α_{xi} 和 α_{yi} 为有用柱段的束流在通过第 i 个聚束间隙时横向发射度增长系数的平方根. 在束流的均方根发射度不变的假定下[1,2]，有

$$\prod_{i=1}^{J} \alpha_{xi} = \prod_{i=1}^{J} \alpha_{yi} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 及 } a_z = \frac{6}{5}\bar{z}_p.$$

三、束流的横向包络与发射度匹配

在描述粒子的运动时我们采用了规一化坐标 x, y, z，它们与实际坐标的关系是

$$X = \frac{x}{\sqrt{\gamma\beta}}; \quad Y = \frac{y}{\sqrt{\gamma\beta}}; \quad \bar{z} = \frac{z}{\sqrt{\gamma^3\beta}}. \tag{3.1}$$

为了反映粒子在输运时依次通过各输运元件的顺序，我们按各元件将自变数 Z 分“节”，以 n 代表“节”的序号，假定在第 n 节中取 m_n 个计算点，并以 i 表示各节中计算点的序号，那么任一点的纵坐标以 Z_{nj} 表示，在各节的终点和始点有

$$Z_{n-1\ m_{n-1}} = Z_{n,0}, \quad Z_{nm_n} = Z_{n+1,0} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

为了提高计算束流空间电荷力的精确度，我们采用逐步近似法，令束流强度

$$I_{nj} = \mu\Delta I_{nj}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \cdots, \left(\frac{I_{nj}}{\Delta I_{nj}}\right).$$

μ 为近似级数，ΔI_{nj} 为步长.

在这种符号规定下，任何相邻两点 Z_{nj-1} 与 Z_{nj} 之间粒子横向运动的元件矩阵为 $R_{u\mu nj}$，在点 Z_{nj} 的装配矩阵和束流包络矩阵分别以 $M_{u\mu nj}$ 和 $\sigma_{u\mu nj}$ 表示，关于这些矩阵的定义参看文 [3]，只不过这里用的是二维矩阵. 脚码 $u = x, y$；μ 表示在 μ 级近似下的值. 在前面所述的空间电荷模型下，各输运元件的横向元件矩阵具有以下形式

1. 自由漂移段（“O”节）

$$R_{u\mu nj} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} S_{u\mu nj} l_{nj} & \dfrac{1}{S_{u\mu nj}} \operatorname{sh} S_{u\mu nj} l_{nj} \\ S_{u\mu nj} \operatorname{sh} S_{u\mu nj} l_{nj} & \operatorname{ch} S_{u\mu nj} l_{nj} \end{pmatrix}, \quad u = x, y \tag{3.2}$$

式中 $l_{nj} = Z_{nj} - Z_{nj-1}$. $S_{u\mu nj}(u = x, y)$ 为空间电荷散焦因子，表示式见下面.

2. 四极磁透镜　对 x 方向聚焦 y 方向散焦的四极透镜叫做“F”节，反之叫“D”节. 对“F”节有

$$R_{x\mu nj} = \begin{pmatrix} \cos K_{x\mu nj} l_{nj} & \dfrac{1}{K_{x\mu nj}} \sin K_{x\mu nj} l_{nj} \\ -K_{x\mu nj} \sin K_{x\mu nj} l_{nj} & \cos K_{x\mu nj} l_{nj} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$R_{y\mu nj} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \bar{K}_{y\mu nj} l_{nj} & \dfrac{1}{\bar{K}_{y\mu nj}} \operatorname{sh} \bar{K}_{y\mu nj} l_{nj} \\ \bar{K}_{y\mu nj} \operatorname{sh} \bar{K}_{y\mu nj} l_{nj} & \operatorname{ch} \bar{K}_{y\mu nj} l_{nj} \end{pmatrix}; \tag{3.4}$$

对“D”节有

$$R_{x\mu nj}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,\bar{K}_{x\mu nj}l_{nj} & \dfrac{1}{\bar{K}_{x\mu nj}}\,\mathrm{sh}\,\bar{K}_{x\mu nj}l_{nj}\\ \bar{K}_{x\mu nj}\,\mathrm{sh}\,\bar{K}_{x\mu nj}l_{nj} & \mathrm{ch}\,\bar{K}_{x\mu nj}l_{nj}\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$R_{y\mu nj}=\begin{pmatrix}\cos K_{y\mu nj}l_{nj} & \dfrac{1}{K_{y\mu nj}}\sin K_{y\mu nj}l_{nj}\\ -K_{y\mu nj}\sin K_{y\mu nj}l_{nj} & \cos K_{y\mu nj}l_{nj}\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

式中 $K_{x\mu nj}$, $\bar{K}_{y\mu nj}$, $\bar{K}_{x\mu nj}$, $K_{y\mu nj}$ 等由下式计算

$$K^2_{u\mu nj}=\frac{eH'_{\mu n}}{m_0c^2\gamma\beta}-S^2_{u\mu nj},\quad \bar{K}^2_{u\mu nj}=\frac{eH'_{\mu n}}{m_0c^2\gamma\beta}+S^2_{u\mu nj}. \tag{3.7}$$

式中 $u=x, y$, $H'_{\mu n}$ 为透镜的磁场梯度.

3. 均匀场偏转磁铁 水平偏转称为“B”节,若垂直偏转可将 x, y 互换

$$R_{x\mu nj}=\begin{pmatrix}\cos B_{x\mu nj}l_{nj} & \dfrac{1}{B_{x\mu nj}}\sin B_{x\mu nj}l_{nj}\\ -B_{x\mu nj}\sin B_{x\mu nj}l_{nj} & \cos B_{x\mu nj}l_{nj}\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$R_{y\mu nj}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,S_{y\mu nj}l_{nj} & \dfrac{1}{S_{y\mu nj}}\,\mathrm{sh}\,S_{y\mu nj}l_{nj}\\ S_{y\mu nj}\,\mathrm{sh}\,S_{y\mu nj}l_{nj} & \mathrm{ch}\,S_{y\mu nj}l_{nj}\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

其中 $B_{x\mu nj}$ 由下式计算:

$$B^2_{x\mu nj}=\frac{1}{\rho_n^2}-S^2_{x\mu nj},\quad \frac{1}{\rho_n}=\frac{eH_n}{m_0c^2\gamma\beta}. \tag{3.10}$$

这里 H_n 是磁场强度, ρ_n 是中心轨道曲率半径.

4. 聚束间隙(“Δ”节)

$$R_{u\mu nj}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,\Delta_{u\mu nj}l_{nj} & \dfrac{1}{\Delta_{u\mu nj}}\,\mathrm{sh}\,\Delta_{u\mu nj}l_{nj}\\ \Delta_{u\mu nj}\,\mathrm{sh}\,\Delta_{u\mu nj}l_{nj} & \mathrm{ch}\,\Delta_{u\mu nj}l_{nj}\end{pmatrix},\quad u=x, y \tag{3.11}$$

式中 $\Delta_{u\mu nj}$ 由下式计算

$$\Delta^2_{u\mu nj}=\frac{e\pi V_{\mu n}}{m_0c^2\gamma^3\beta^3\lambda_n L_n}+S^2_{u\mu nj},\quad u=x, y \tag{3.12}$$

这里 L_n 为聚束间隙长度. 利用前面所导出的空间电荷力的表示式(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5)可以求得 $S^2_{u\mu nj}$ 的表示式如下

$$S^2_{x\mu nj}=\begin{cases}\dfrac{e\mu\Delta I_{nj}}{\varepsilon_0\pi m_0c^3\beta^3\gamma^3\tilde{a}_{\mu nj}(\tilde{a}_{\mu nj}+\tilde{b}_{\mu nj})}, & 当\ n\leqslant\nu_1\\ \dfrac{e}{\varepsilon_0\pi m_0c^2}\left[\dfrac{\rho_{1\mu nj}-\rho_{2\mu nj}}{\gamma^3\beta^2}\mathscr{M}_{x\mu nj}+\dfrac{\rho_{2\mu nj}\tilde{a}_{y\mu nj}}{\gamma^3\beta^2(\tilde{a}_{x\mu nj}+\tilde{a}_{y\mu nj})}\right], & 当\ n\geqslant\nu_1+1\end{cases} \tag{3.13}$$

$$S^2_{y\mu nj}=\begin{cases}\dfrac{e\mu\Delta I_{nj}}{\varepsilon_0\pi m_0c^3\gamma^3\beta^3\tilde{b}_{\mu nj}(\tilde{a}_{\mu nj}+\tilde{b}_{\mu nj})}, & 当\ n\leqslant\nu_1\\ \dfrac{e}{\varepsilon_0\pi m_0c^2}\left[\dfrac{\rho_{1\mu nj}-\rho_{2\mu nj}}{\gamma^3\beta^2}\mathscr{M}_{y\mu nj}+\dfrac{\rho_{2\mu nj}\tilde{a}_{x\mu nj}}{\gamma^3\beta^2(\tilde{a}_{x\mu nj}+\tilde{a}_{y\mu nj})}\right], & 当\ n\geqslant\nu_1+1\end{cases} \tag{3.14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{M}_{u\mu nj}=\frac{\tilde{a}_{x\mu nj}\tilde{a}_{y\mu nj}\tilde{a}_{z\mu nj}\gamma}{2}\int_0^\infty\frac{d\tau}{(\tilde{a}^2_{u\mu nj}+\tau)\sqrt{(\tilde{a}^2_{x\mu nj}+\tau)(\tilde{a}^2_{y\mu nj}+\tau)(\tilde{a}^2_{z\mu nj}\gamma^2+\tau)}},\\&u=x,y,\end{aligned}\right\},\tag{3.15}$$

$$\left.\begin{aligned}&\rho_{1\mu nj}=\frac{\alpha_{x1}\alpha_{y1}a_{z\mu,\nu_1+1.0}T_{rf1}\mu\Delta I_{nj}}{\pi\tilde{a}_{x\mu nj}\tilde{a}_{y\mu nj}\tilde{a}_{z\mu nj}\beta\lambda_1},\\&\rho_{2\mu nj}=\frac{\mu T_{rf1}\Delta I_{nj}\prod_{i=1}^{J}\alpha_{xi}\alpha_{yi}}{\pi\tilde{a}_{x\mu nj}\tilde{a}_{y\mu nj}\beta\lambda_1}\left(\frac{1-\dfrac{4\alpha_{x1}\alpha_{y1}a_{z\mu\nu_1+1.0}}{3\beta\lambda_1}}{1-\dfrac{4\tilde{a}_{z\mu nj}\prod_{i=1}^{J}\alpha_{xi}\alpha_{yi}}{3\beta\lambda_1}}\right),\\&\text{当 }\nu_J+1\leqslant n,\ J=1,2,3,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.16}$$

并且有

$$\tilde{a}_{\mu nj}=\frac{1}{2}(a_{\mu-1\,nj}+a_{\mu-1\,n\,j-1}),\quad\tilde{b}_{\mu nj}=\frac{1}{2}(b_{\mu-1\,nj}+b_{\mu-1\,n\,j-1}),\tag{3.17}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{a}_{u\mu nj}=\frac{1}{2}(a_{u\mu-1\,nj}+a_{u\,\mu-1\,n\,j-1}),\\&a_{u\mu-1\nu_J+1.0}=\alpha_{uJ}a_{u\mu-1\nu_Jm_{\nu_J}},\quad u=x,y,\ J=1,2,3,\cdots\\&a_{x\mu-1\nu_1m_{\nu_1}}=a_{\mu-1\nu_1m_{\nu_1}}\quad a_{y\mu-1\nu_1m_{\nu_1}}=b_{\mu-1\nu_1m_{\nu_1}}\end{aligned}\right\}\tag{3.18}$$

以上各式中的 $\nu_J(J=1,2,3,\cdots)$ 是第 J 个聚束器间隙的节号.

粒子横向运动的装配矩阵 $M_{u\mu nj}(u=x,y)$ 可由下列递推关系式计算

$$\left.\begin{aligned}&M_{u\mu nj}=R_{u\mu nj}M_{u\mu n\,j-1},\quad M_{u\mu n0}=M_{u\mu\,n-1\,m_{n-1}},\\&M_{u\mu10}=1,\quad M_{u\mu,\nu_J+1,0}=1,\quad J=1,2,3,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.19}$$

束流的横向包络矩阵为

$$\sigma_{u\mu nj}=\begin{cases}M_{u\mu nj}\sigma_{u\mu1.0}M^T_{u\mu nj}, & \text{当 } n\leqslant\nu_1\\ M_{u\mu nj}\alpha^2_{uJ}\sigma_{u\mu\nu_Jm_{\nu_J}}M^T_{u\mu nj}, & \text{当 } n\geqslant\nu_{J+1}\end{cases}\quad J=1,2,3,\cdots\tag{3.20}$$

式中 $M^T_{u\mu nj}$ 是 $M_{u\mu nj}$ 的转置矩阵.

我们以 $a_{u\mu nj}$ 和 $\theta_{u\mu nj}$ 表示束流的横向半包络和最大散角；$\varepsilon_{u\mu nj}$ 表示束流横向规一化发射度的数值(不含 π). 则这些量同 $\sigma_{u\mu nj}$ 的矩阵元之间有以下关系

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{u\mu nj}(11)=\gamma\beta a^2_{u\mu nj},\quad\sigma_{u\mu nj}(22)=\gamma\beta\theta^2_{u\mu nj},\\&\sigma_{u\mu nj}(12)=\sigma_{u\mu nj}(21)=\pm\varepsilon_{u\mu nj}\sqrt{\left(\frac{\gamma\beta a_{u\mu nj}\theta_{u\mu nj}}{\varepsilon_{u\mu nj}}\right)^2-1}.\end{aligned}\right\}\tag{3.21}$$

式中 $u=x,y$，当 $n\leqslant\nu_1$ 时有 $a_{x\mu nj}=a_{\mu nj}$，$a_{y\mu nj}=b_{\mu nj}$.

关于束流发射度的匹配问题，我们已在文献[3]中作了详细阐述，这里所不同的是需要对各种流强都进行匹配. 设匹配点的位置是 $n=s$，$j=t$，在 μ 级近似下，要求将束流的横向发射度匹配为给定矩阵 $A_{u\mu}$ 所描述的形状，那么匹配条件可以写为

$$\left|\frac{\sigma_{u\mu st(11)}-A_{u\mu(11)}}{A_{u\mu(11)}}\right|\leqslant\delta,\tag{3.22}$$

或

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\sigma_{u\mu st(12)}-A_{u\mu(12)}}{A_{u\mu(12)}}\right|\leqslant\delta, \quad 当\ A_{u\mu(12)}\neq 0\\[2ex] \left|\dfrac{\sigma_{u\mu st(22)}-A_{u\mu(22)}}{A_{u\mu(22)}}\right|\leqslant\delta, \quad 当\ A_{u\mu(12)}=0\end{array}\right\} \tag{3.23}$$

式中 $u=x, y$; δ 为允许的匹配误差. 由此可知，满足横向匹配，至少需要有四个磁场梯度可以独立调节的四极透镜.

四、束流的纵向包络和注入匹配

利用纵向空间电荷力 $f_z^{(s)}$ 的表示式 (2.6) 和纵向运动方程式，可以导出粒子在聚束间隙之外的纵向运动元件矩阵为

$$R_{z\mu nj}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} S_{z\mu nj}l_{nj} & \dfrac{1}{S_{z\mu nj}}\operatorname{sh} S_{z\mu nj}l_{nj}\\ S_{z\mu nj}\operatorname{sh} S_{z\mu nj}l_{nj} & \operatorname{ch} S_{z\mu nj}l_{nj}\end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

式中 $S_{z\mu nj}$ 由下式计算

$$S^2_{z\mu nj}=\frac{e}{\varepsilon_0\pi m_0c^2}\frac{\rho_{1\mu ni}-\rho_{2\mu nj}}{\gamma^3\beta^2}\mathscr{M}_{z\mu nj}, \tag{4.2}$$

$$\mathscr{M}_{z\mu nj}=\frac{\tilde a_{x\mu nj}\tilde a_{y\mu nj}\tilde a_{z\mu nj}\gamma}{2}\int_0^\infty\frac{d\tau}{(\tilde a^2_{z\mu nj}\gamma^2+\tau)\sqrt{(\tilde a^2_{x\mu nj}+\tau)(\tilde a^2_{y\mu nj}+\tau)(\tilde a^2_{z\mu nj}\gamma^2+\tau)}}. \tag{4.3}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}\tilde a_{z\mu nj}=\dfrac{1}{2}(a_{z\mu-1nj}+a_{z\mu-1nj-1}), \quad a_{z\mu-1n+1.0}=a_{z\mu-1nm_n}, \quad 当\ n\neq\nu_J\\ a_{z\mu-1,\nu_J+1.0}=(\alpha_{xJ}\alpha_{yJ})^{-1}a_{z\mu-1\nu_Jm_{\nu_J}}, \quad J=1,2,3\cdots\end{array}\right\} \tag{4.4}$$

装配矩阵为

$$M_{z\mu nj}=R_{z\mu nj}M_{z\mu nj-1}, \quad M_{z\mu\nu_J+1.0}=1, \quad J=1,2,3\cdots \tag{4.5}$$

在各聚束间隙中粒子的纵向运动由 (2.1) 描述. 利用 (2.1) 和 (4.5) 并考虑到在间隙边界上运动的连续条件，即可得到在任何位置上描写束流纵向聚束情况的相曲线为

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}z_{\mu nj}\\ z'_{\mu nj}\end{pmatrix}=M_{z\mu nj}\begin{pmatrix}z_{\mu\nu_1+1.0}\\ -\chi_{1\mu}\sin(Q_1z_{\mu\nu_1+1.0})+z'_0\end{pmatrix}, \quad 当\ \nu_1+1\leqslant n\leqslant\nu_2\\[2ex] \begin{pmatrix}z_{\mu nj}\\ z'_{\mu nj}\end{pmatrix}=M_{z\mu nj}\begin{pmatrix}z_{\mu\nu_Jm_{\nu_J}}\\ -\chi_{J\mu}\sin(Q_Jz_{\mu\nu_Jm_{\nu_J}}+k_J\pi)+z'_{\mu\nu_Jm_{\nu_J}}\end{pmatrix},\\ \qquad\qquad 当\ \nu_J+1\leqslant n\leqslant\nu_{J+1}, \quad J=2,3,4\cdots\\[2ex] \chi_{J\mu}=\dfrac{eV_{J\mu}}{m_0c^2\gamma^{3/2}\beta^{3/2}}; \quad Q_J=\dfrac{2\pi}{\gamma^{3/2}\beta^{3/2}\lambda_J}.\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

假如共有 q 个聚束器，那么应该认为 $\nu_{q+1}=\tau$ 为注入匹配点的“节”号. (4.6) 式中的 z'_0 为预注入器输出能量散度的影响，在讨论注入匹配时可暂时略去，以后作为公差计算.

假定在注入点 $n=\tau, j=m_\tau$ 处，要求将有用柱段 $|z_{\mu\tau m_\tau}|\leqslant z_P$ 的发射度匹配为如下的给定椭圆

$$(z, z')\theta_\mu^{-1}\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = 1, \tag{4.7}$$

θ_μ 为给定矩阵．那么注入匹配条件可以写为

$$\left.\begin{aligned}
&(z_P, z'_P)\theta_\mu^{-1}\begin{pmatrix} z_P \\ z'_P \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} z_P \\ z'_P \end{pmatrix} = M_{z\mu\tau m_\tau}\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_q m_{\nu_q}P} \\ -\chi_{q\mu}\sin\left(Q_q z_{\mu\nu_q m_{\nu_q}P} + k_q\pi\right) + z'_{\mu\nu_q m_{\nu_q}P} \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_J m_{\nu_J}P} \\ z'_{\mu\nu_J m_{\nu_J}P} \end{pmatrix} = M_{z\mu\nu_J m_{\nu_J}}\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_{J-1} m_{\nu_{J-1}}P} \\ -\chi_{J-1\mu}\sin\left(Q_{J-1} z_{\mu\nu_{J-1} m_{\nu_{J-1}}P} + k_{J-1}\pi\right) + z'_{\mu\nu_{J-1} m_{\nu_{J-1}}P} \end{pmatrix}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad J = q, q-1, \cdots, 3. \\
&\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_2 m_{\nu_2}P} \\ z'_{\mu\nu_2 m_{\nu_2}P} \end{pmatrix} = M_{z\mu\nu_2 m_{\nu_2}}\begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{Q_1}\eta \\ -\chi_{1\mu}\sin(\pi\eta) \end{pmatrix}, \quad z_P = \frac{2}{3}\left(\prod_{i=1}^{q}\alpha_{x_i}\alpha_{y_i}\sqrt{\theta_{\mu(11)}}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

及

$$\left.\begin{aligned}
&(z, z')\theta_\mu^{-1}\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} < 1, \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = M_{z\mu\tau m_\tau}\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_q m_{\nu_q}} \\ -\chi_{q\mu}\sin\left(Q_q z_{\mu\nu_q m_{\nu_q}} + k_q\pi\right) + z'_{\mu\nu_q m_{\nu_q}} \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_J m_{\nu_J}} \\ z'_{\mu\nu_J m_{\nu_J}} \end{pmatrix} = M_{z\mu\nu_J m_{\nu_J}}\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_{J-1} m_{\nu_{J-1}}} \\ -\chi_{J-1\mu}\sin\left(Q_{J-1} z_{\mu\nu_{J-1} m_{\nu_{J-1}}} + k_{J-1}\pi\right) + z'_{\mu\nu_{J-1} m_{\nu_{J-1}}} \end{pmatrix}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad J = q, q-1, \cdots, 3 \\
&\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_2 m_{\nu_2}} \\ z'_{\mu\nu_2 m_{\nu_2}} \end{pmatrix} = M_{z\mu\nu_2 m_{\nu_2}}\begin{pmatrix} z_{\mu\nu_1+1.0} \\ -\chi_{1\mu}\sin\left(Q_1 z_{\mu\nu_1+1.0}\right) \end{pmatrix}, \quad 当\ |z_{\mu\nu_1+1.0}| < \frac{\pi}{Q_1}\eta
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

式中的 η 为注入效率或称聚束效率

$$\eta = \frac{2z_{\mu\nu_1+1.0P}}{\gamma^{3/2}\beta^{3/2}\lambda_1}, \tag{4.10}$$

方程 (4.8) 和 (4.9) 只是保证百分比为 η 的束流可以被直线加速器捕获的条件． 为了得到更好的束流能谱或容忍较大的公差，可增加一个更严的条件

$$(z_m, z'_{\max})\theta_\mu^{-1}\begin{pmatrix} z_m \\ z'_{\max} \end{pmatrix} < \epsilon^2. \tag{4.11}$$

式中 ϵ 是某个给定的小于 1 的数，$z'_{\max}$ 是在区域 $|z_{\mu\nu_1+1.0}| < \dfrac{\pi}{Q_1}\eta$

中 z' 的最大值，$z_m = z|_{z'=z'_{\max}}$.

在各种流强下完全满足上述注入匹配条件至少需要三个聚束器．假如聚束器少于三个，则不能完全补偿空间电荷效应，注入效率 η 将会随着束流强度的增大而下降．

在满足上述匹配的参数下，束团的纵向半包络即等效椭球的半轴 $a_{z\mu ni}$ 可如下计算

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} z_{\mu njP} \\ z'_{\mu njP} \end{pmatrix} = M_{z\mu nj} \begin{pmatrix} \pi\eta/Q_1 \\ -\chi_{1\mu}\sin(\pi\eta) \end{pmatrix}, \quad a_{z\mu nj} = \dfrac{3z_{\mu njP}}{2\alpha_{x_1}\alpha_{y_1}\sqrt{\gamma^3\beta}}, \quad \text{当 } \nu_1 + 1 \leqslant n \leqslant \nu_2 \text{ 时} \\
\quad \begin{pmatrix} z_{\mu njP} \\ z'_{\mu njP} \end{pmatrix} = M_{z\mu nj} \begin{pmatrix} z_{\mu\nu_J m_{\nu_J} P} \\ -\chi_{J\mu}\sin(Q_J z_{\mu\nu_J m_{\nu_J} P} + k_J\pi) + z'_{\mu\nu_J m_{\nu_J} P} \end{pmatrix}, \\
\quad a_{z\mu nj} = \dfrac{3z_{\mu njP}}{2\left(\prod\limits_{i=1}^{J}\alpha_{x_i}\alpha_{y_i}\right)\sqrt{\gamma^3\beta}}, \quad \text{当 } \nu_J + 1 \leqslant n \leqslant \nu_{J+1}, \ J = 2, 3, 4, \cdots, q
\end{array}\right\} \tag{4.12}$$

在注入匹配点上,束流在相平面 (z, z') 上的分布,可以由 (4.6) 式计算出来,在计算束流分布时可以计入预注入器输出能散度 $\left(\frac{\Delta W}{W}\right)$ 的影响,这时有

$$z'_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma^{3/2}\beta^{3/2}}\left(\frac{\Delta W}{W}\right). \tag{4.13}$$

五、计算的循环方式

原则上,按照上述公式系统可以用各种计算机语言去编写程序. 计算循环可采取以下方式:

1. 作零级近似, $\mu = 0$, 有 $S^2_{u0nj} = 0$ $(u = x, y, z)$. 进行 z 计算,产生满足零级注入匹配的 V_{J0} $(J = 1, 2, 3, \cdots)$, η_0 及 a_{z0nj}; 将 V_{J0} 输入横向进行 x, y 计算,产生满足零级横向匹配的 H'_{0n} (或 L_{0n}), $n = 1, 2, 3 \cdots$, 同时产生 a_{x0nj} 和 a_{y0nj}.

2. 作一级近似, $\mu = 1$, 用上面产生的 a_{x0nj}, a_{y0nj}, a_{z0nj} 输入计算 S^2_{u1nj}, 进行 z 计算,产生满足一级注入匹配的 V_{J1}, η_1 及 a_{z1nj}, 将 V_{J1} 输入横向进行 x, y 计算,产生满足一级横向匹配的 H'_{1n} (或 L_{1n}) 以及 a_{x1nj}, a_{y1nj}.

以下 $\mu = 2, 3, 4 \cdots$ 类推,直到所要求的束流强度.

参 考 文 献

[1] B. Bru and M. Weiss, CERN/MPS/LIN, 72—4 (1972).
[2] B. Bru and M. Weiss, CERN/MPS/LIN, 74—1 (1974).
[3] 魏开煜、梁岫如,1979 年 4 月成都加速器技术交流会议报告。

A COMPUTATIONAL METHOD FOR THE DESIGN OF LOW ENERGY HIGH INTENSITY BEAM TRANSPORT SYSTEMS

Wei Kai-yu Lin Zhen-hua

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper we have described a computational method of high intensity beam transport systems. This is a step by step approximation method. In addition, we have developed the general formulas for the calculation of systems including arbitrary number of bunchers.