第4卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 3
1980年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1980

研究简报

超对称"线性"多重态和超场

张元仲　　赵志泳
(中国科学院物理研究所)　(北京大学)

摘　要

本文研究了"线性"超场的一些性质,并给出了线性多重态在无穷小超对称变换下的改变量.

研究时空对称性与内部对称性相结合的更大对称性是物理学中感兴趣的一个课题. 现已知道,如果引进反对易的参数,我们就能克服 no-go 定理(即时空对称性与内部对称性不能统一考虑)而引入超对称性 (Fermi-Bose 对称性). 物理上研究得最详细的超对称代数是 Poincaré 李代数的一种推广:在 Poincaré 李代数中(生成元是 $M^{\mu\nu}$ 和 P^μ) 加上一个 Majorana 旋量荷 Q_α(它把 boson 场变成 fermion 场,反之亦然). 在这个超代数中,与 Q_α 有关的对易子是:

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= -2\gamma^\mu_{\alpha\beta}P_\mu,\\ [P_\mu, Q_\alpha] &= 0,\\ [Q_\alpha, M^{\mu\nu}] &= i\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}Q_\beta.\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $\bar{Q}_\alpha = (\tilde{Q}\gamma^0)_\alpha$. 其余的对易关系与通常 Poincaré 代数相同. 最早, Wess 和 Zumino[1] 给出了这个超对称代数的两个线性表示(标量表示和矢量表示). 随后, Salam 和 Strathdee[2] 引进了超场的概念. 用超场研究这个超对称代数及其表示是很方便的. 超场 $\Phi(x,\theta)$ 是定义在八维超空间 (x_μ, θ_α) 上的场量, x_μ 是时空坐标, θ_α 是全反对易的 Majorana 旋量坐标. 他们用这种超场概念得到了标量多重态和矢量多重态. 接着, Ferrara, Zumino 和 Wess[3] 又把超场概念推广到用二分量复旋量 θ 和 $\bar\theta$ 来表示[4], 定义了三种等价的超场 $\Phi(x,\theta,\bar\theta)$, $\Phi_1(x,\theta,\bar\theta)$ 和 $\Phi_2(x,\theta,\bar\theta)$,它们之间有如下关系:

$$\Phi(x_\mu,\theta,\bar\theta) = \Phi_1(x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar\theta, \theta, \bar\theta) = \Phi_2(x_\mu - i\theta\sigma_\mu\bar\theta, \theta, \bar\theta), \tag{2}$$

(其中二分量记号的定义见[4]). 在无穷小超对称变换(无穷小反对易旋量参数是 ζ^α 和 $\bar\zeta_{\dot\alpha}$)下它们分别做如下改变:

$$\delta\Phi = \left[\zeta\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar\zeta\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i(\theta\sigma_\mu\bar\zeta - \zeta\sigma_\mu\bar\theta)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right]\Phi, \tag{3}$$

$$\delta\Phi_1 = \left[\zeta\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar\zeta\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + 2i\theta\sigma_\mu\bar\zeta\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right]\Phi_1, \tag{4}$$

本文1979年2月23日收到.

$$\delta\Phi_2=\left[\zeta\frac{\partial}{\partial\theta}+\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}-2i\theta\sigma_\mu\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right]\Phi_2. \tag{5}$$

相应于这三种超场的不变微分算子是:

$$\Phi:\ D_\alpha=\frac{\partial}{\partial\theta}+i\sigma_\mu\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial x_\mu},\qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}-i\theta\sigma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \tag{6}$$

$$\Phi_1:\ D_\alpha=\frac{\partial}{\partial\theta}+2i\sigma_\mu\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial x_\mu},\qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \tag{7}$$

$$\Phi_2:\ D_\alpha=\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}-2i\theta\sigma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{8}$$

以第“1”种类型的超场 Φ_1 为例,它分为三种类型的超场（或多重态）:（i）Φ_1 与 $\bar{\theta}$ 无关（相应于标量多重态),（ii）Φ_1 是 $\bar{\theta}$ 的线性函数（相应于“线性”多重态),（iii）Φ_1 是 $\bar{\theta}$ 的二次函数（相应于矢量多重态）. 标量多重态和矢量多重态已经详细研究过了，这也是物理上最感兴趣的两个多重态. 本文的目的是研究“线性”多重态的一些性质.

“线性”多重态相应的超场 $\Phi_1^{(l)}(x,\theta,\bar{\theta})$ 是 $\bar{\theta}$ 的线性函数，用二分量的 θ^α 和 $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(\alpha,\dot{\alpha}=1,2)$ 展开,超场 $\Phi_1^{(l)}$ 的形式如下:

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(l)}(x,\theta,\bar{\theta})=&A(x)+i\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)+i\theta^\alpha\theta_\alpha F(x)\\&+\theta\sigma_\mu\bar{\theta}V^\mu(x)+\theta^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x),\end{aligned} \tag{9}$$

其中, $A(x)$ 和 $F(x)$ 是标量场, $\psi(x)$, $\bar{\chi}(x)$ 和 $\bar{\lambda}(x)$ 是二分量旋量场, $V^\mu(x)$ 是矢量场，都是复的,它们构成“线性”多重态.

在无穷小超对称变换下,由方程（4）可以得到“线性”多重态做如下改变:

$$\begin{aligned}\delta A&=i(\zeta\psi+\bar{\zeta}\bar{\chi}),\\ \delta\psi&=2\zeta F-i\left(V^\mu+2i\frac{\partial A}{\partial x_\mu}\right)\sigma_\mu\bar{\zeta},\\ \delta\bar{\chi}&=-i\zeta\sigma_\mu V^\mu,\\ \delta F&=-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi\sigma_\mu\bar{\zeta}-i\bar{\zeta}\bar{\lambda},\\ \delta V_\nu&=-\zeta\sigma_\nu\bar{\lambda}+(\sigma_\mu\bar{\zeta})^\alpha(\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\beta}}\frac{\partial\bar{\chi}^{\dot{\beta}}}{\partial x_\mu},\\ \delta\bar{\lambda}_{\dot{\beta}}&=i(\sigma_\mu\bar{\zeta})^\alpha(\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\beta}}\frac{\partial V^\nu}{\partial x_\mu}.\end{aligned} \tag{10}$$

现在,我们把“线性”超场(9)式用方程(3)定义的超场写出来,由(4)式可得到:

$$\begin{aligned}\Phi^{(l)}(x_\mu,\theta,\bar{\theta})&=\Phi_1^{(l)}(x_\mu+i\theta\sigma_\mu\bar{\theta},\theta,\bar{\theta})\\&=\exp\left(i\theta\sigma_\mu\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)(A(x)+i\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)\\&\quad+i\theta^\alpha\theta_\alpha F(x)+\theta\sigma_\mu\bar{\theta}V^\mu(x)+\theta^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}).\end{aligned} \tag{11}$$

因此,由（11）式可以把“线性”超场用四分量旋量坐标 $\theta_\alpha(\alpha=1,\cdots,4)$ 写出（四分量的 θ_α 与二分量的 θ^α 和 $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ 的关系见[4]),

$$\Phi^{(l)}(x_\mu,\theta_\alpha)=\exp\left(\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\partial}{\partial x_\mu}\theta\right)\left(A(x)+\bar{\theta}\Psi(x)+\bar{\theta}\frac{1-i\gamma_5}{2}\theta F(x)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\bar{\theta}i\gamma_5\gamma_\mu\theta V^\mu(x)-\bar{\theta}\frac{1-i\gamma_5}{2}\theta\bar{\theta}\lambda_+(x)\Big)$$

$$=A-\bar{\theta}\Psi-\bar{\theta}\frac{1-i\gamma_5}{2}\theta F-\frac{1}{2}\bar{\theta}i\gamma_5\gamma_\mu\theta\left(V^\mu+i\frac{\partial A}{\partial x_\mu}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta\bar{\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}-\bar{\theta}\frac{1-i\gamma_5}{2}\theta\bar{\theta}\lambda_++\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\left(i\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\mu}-\frac{1}{2}\Box A\right). \tag{12}$$

其中 $\Psi=\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi+\frac{1+i\gamma_5}{2}\chi$ 是 Dirac 旋量场，$\lambda_+=\frac{1+i\gamma_5}{2}\lambda$ 是左手 Dirac 场量 $\Box=g_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$.

在无穷小超对称变换下，这个"线性"多重态(两个复标场 A 和 F，两个旋量场 Ψ 和 λ，一个复矢量场 V^μ) 作如下改变：

$$\delta A=-\bar{\zeta}\Psi,$$

$$\delta\Psi=(1-i\gamma_5)\left(F-i\gamma_\mu\frac{\partial A}{\partial x_\mu}\right)\zeta+i\gamma_5\gamma_\mu\zeta V^\mu,$$

$$\delta F=i\bar{\zeta}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1-i\gamma_5}{2}\right)\Psi+\bar{\zeta}\lambda_+,$$

$$\delta V_\nu=i\bar{\zeta}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\gamma_\nu\left(\frac{1+i\gamma_5}{2}\right)\Psi-\bar{\zeta}\gamma_\nu\lambda_+,$$

$$\delta\lambda_+=-i\gamma_\nu\gamma_\mu\frac{1+i\gamma_5}{2}\zeta\frac{\partial V^\nu}{\partial x_\mu}. \tag{13}$$

其中 ζ 是四分量反对易的无穷小 Majorana 旋量．变换 (13) 与变换 (10) 等价．

容易证明，"线性"超场满足如下的方程(约束条件)：

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi^{(l)}(x,\theta,\bar{\theta})=0, \tag{14}$$

$$\bar{D}\frac{1+i\gamma_5}{2}D\Phi^{(l)}(x,\theta)=0. \tag{15}$$

方程(14)是二分量旋量坐标下的形式，$\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ 是方程(6)中给出的不变微分算子．方程 (15) 则是四分量旋量坐标下的形式，不变微分算子 D 和 $\bar{D}$ 是：$D_\alpha=\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha}-i(\gamma_\mu\theta)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\bar{D}^\alpha=(C^{-1})^{\alpha\beta}D_\beta$, C 是电荷共轭矩阵．从(15)式看到，线性超场 $\Phi^l(x,\theta)$ 就是 Salam 和 Strathdee 给出的超场 $\Phi_1(x,\theta)$ (见[2])．

以上是用第"1"种类型的超场 $\Phi_1(x,\theta,\bar{\theta})$ 讨论的分类．类似地，可以用第"2"种类型的超场 $\Phi_2(x,\theta,\bar{\theta})$ 做同样的研究． 类型"2"给出的"线性"超场 $\Phi_2^{(l)}(x,\theta,\bar{\theta})$ (θ 的线性函数)与 $\Phi_1^{(l)}(x,\theta,\bar{\theta})$ 的复共轭形式等价．这个"线性"超场满足如下方程：

$$D^\alpha D_\alpha\Phi^{(l)}(x,\theta,\bar{\theta})=0, \tag{16}$$

$$\bar{D}\frac{1-i\gamma_5}{2}D\Phi^{(l)}(x,\theta)=0. \tag{17}$$

方程(16)是二分量旋量坐标下的形式，D_α 由方程 (6) 给出．方程 (17) 是用四分量旋量坐标表达的方程，$\bar{D}$ 和 D 与 (15) 式中的相同．

为了区分 (15) 式和 (17) 式定义的两个"线性"超场，我们加上下标"+"和"−"，即用

$\Phi_{+}^{(l)}$ 表示满足方程（14）和（15）的“线性”超场，用 $\Phi_{-}^{(l)}$ 表示满足方程（16）和（17）的“线性”超场．“线性”超场 $\Phi_{\pm}^{(l)}$，Chiral 超场 $\Phi_{\pm}$ 与一般超场（矢量多重态）Φ 之间（例如）有如下一些关系：

$$\Phi_{+} + \Phi_{+}^{(l)} = \Phi_{+}^{(l)}, \quad \Phi_{-} + \Phi_{-}^{(l)} = \Phi_{-}^{(l)},$$
$$\Phi_{\pm}^{(l)}\Phi_{\mp}^{(l)} = \Phi.$$

从上述“线性”超场的这些性质出发，我们可以由一个线性多重态构造出其他线性多重态或矢量多重态．

参　考　文　献

[1] J. Wess and B. Zumino, *Nucl. Phys.*, **B70**(1974), 39.

[2] A. Salam and J. Strathdee, *Nucl. Phys.*, **B76**(1974), 477; *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 1521; *For. der Physik*, **26**(1978), 57.

[3] S. Ferrara et al., *Phys. Lett.*, **51B**(1974), 239.

[4] $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} = (-+++)$.
$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$,
$\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$.
电荷共轭矩阵 C 定义为：$C^{-1}\gamma^\mu C = -\tilde{\gamma}^\mu$.
Majorana 旋量定义为：$\psi = C\tilde{\bar{\psi}}$.
二分量旋量记号取如下规定：ψ^α 为二分量旋量($\alpha=1, 2$)它的共轭旋量是 $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$($\dot{\alpha}=1, 2$)，其变换性质与 ψ^α 的复数共轭 $(\psi^\alpha)^*$ 的变换性质相同，对于一个 Majorana 旋量，则有 $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = (\psi^\alpha)^*$. 旋量指标 α（或 $\dot{\alpha}$）的升降用 $\epsilon^{\alpha\beta}$（或 $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$）及 $\epsilon_{\alpha\beta}(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})$ 进行，$\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ 对于不带点的定义相同 $\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\lambda} = \delta^\alpha{}_\lambda$. 四分量的 Majorana 旋量坐标 θ^α 与相应的二分量旋量坐标 θ^α 和 $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ 之间的关系是：$\theta^\alpha = \frac{1 - i\gamma_5}{2}\theta$, $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = (\theta_\alpha)^* = \frac{1 + i\gamma_5}{2}\theta$. 定义任意两个二分量旋量的缩写形式为：$\theta\psi \equiv \theta^\alpha\psi_\alpha$, $\bar{\theta}\bar{\psi} \equiv \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$. 定义 2×2 矩阵 σ_μ 为 $(\sigma_\mu)_{\alpha\beta} = (1, \sigma_j)$, $\theta\sigma_\mu\bar{\psi} \equiv \theta^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$，其中1是 2×2 单位矩阵，$\sigma_j (j = 1, 2, 3)$ 是 Pauli 矩阵．

SUPERSYMMETRIC "LINEAR" MULTIPLET AND SUPERFIELDS

ZHANG YUAN-ZHONG
(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ZHAO ZHI-YONG
(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper we investigate some properties of the "linear" superfields, and give the variation of this "linear" multiplet under an infinitesimal supersymmetry transformation.