

α - α 散射中 α 大小变化的影响

陈永寿 郑玉明 卢兆启

(中国科学院原子能研究所)

摘 要

本文给出一种顾及核的大小变化对散射影响的计算方案,并对 α - α 散射进行了计算,即从双中心壳模型微观多体理论出发,先用变分法计算出 α 大小随某种生成坐标(二 α 的平均间距)的变化,然后选取一种试探相对运动波函数,利用生成坐标方法和共振群方法的联系,计算 α - α 的散射相移. 计算结果说明, α 大小变化对散射有明显影响,并对理论计算值有所改进.

一、引 言

当两个不是很高能量的复杂原子核散射时,绝热近似是成立的. 从而可以认为,核的大小、形状和取向等将随二核的相互接近而变化. 研究这些集体自由度对散射的影响是有意义的,不过对此问题做完满的理论计算尚存在很大困难,本文仅就核的大小变化对散射的影响进行研究. 计算选取 α - α 散射为例,这是因为它的实验数据已积累的比较丰富,低能散射是比较干净的单道,多体波函数比较清楚,核力也较好等,从而有利于核大小变化效应的研究. 本文计算考虑了波函数的完全反对称化和二体库仑相互作用. 首先从双中心壳模型的微观多体理论出发,在绝热近似假定下,用变分法计算出 α 的大小随二 α 平均间距(取为生成坐标)的变化,然后利用生成坐标方法(GCM)和共振群方法(RGM)的联系的方法,计算散射相移. 计算结果表明, α 大小变化对散射相移有明显影响,在共振能区影响更大些. 因此,在对复杂核散射相移作精确的计算中,似应考虑散射核大小变化的影响. 本文在第二节给出主要公式;第三节为计算结果;第四节进行简略讨论.

二、主要公式

设 α 粒子的 4 个核子分别运动在谐振子位阱 1 和 2 中. 两阱心间距为 S , 位阱参数为 b . 我们将 8 个核子的多体波函数写为:

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \Phi_{c.m.}(\mathbf{R}_c) \mathcal{A} [\Phi_1^{(in)}(\xi_1) \Phi_2^{(in)}(\xi_2) \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{S})]. \quad (1)$$

式中, \mathbf{X} 为所有核子的坐标(包括自旋和同位旋)的缩写; \mathbf{R}_c 为体系的质心坐标; \mathbf{R} 为二 α 粒子的相对运动坐标,而 ξ_1 和 ξ_2 是其内部坐标; $\Phi_{c.m.}$ 为质心波函数; $\Phi_1^{(in)}$ 和 $\Phi_2^{(in)}$ 为

二个 α 的内部波函数, 它们均处于 s 态; $\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ 称为折迭函数.

按 GCM, 总波函数可写为,

$$\Psi^\alpha(\mathbf{X}) = \int \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) f(\mathbf{S}) d\mathbf{S}. \quad (2)$$

权函数 $f(\mathbf{S})$ 满足 Hill-Wheeler 方程,

$$\int \mathcal{H}(\mathbf{S}, \mathbf{S}') f(\mathbf{S}') d\mathbf{S}' = 0, \quad (3)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{S}, \mathbf{S}') = \langle \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) | H - E | \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}') \rangle. \quad (4)$$

体系的多体哈密顿量 H 写为:

$$H = \sum_{i=1}^8 t_i - T_{c.m.} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (V_{ij}^{(N)} + V_{ij}^{(C)}), \quad (5)$$

$V_{ij}^{(N)}$ 和 $V_{ij}^{(C)}$ 分别为二体核力和库仑力.

体系总能量 $E = E_\lambda + 2E_a^{(in)}$, E_λ 为入射能量, $E_a^{(in)}$ 为 α 粒子内部能量.

按 RGM, 体系波函数可写为:

$$\Psi^R(\xi_1, \xi_2, \mathbf{R}) = \mathcal{A} [\Phi_1^{(in)}(\xi_1) \Phi_2^{(in)}(\xi_2) g(\mathbf{R})], \quad (6)$$

$g(\mathbf{R})$ 为相对运动波函数, 它满足共振群方程, 按分波展开可写为:

$$\int \mathcal{L}_l(R, R') g_l(R') dR' = 0, \quad (7)$$

\mathcal{L}_l 为 RGM 积分核 $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ 的 l 分波部分. 积分核 $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ 可表为:

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \langle \Phi_1^{(in)} \Phi_2^{(in)} | H - E | \mathcal{A} [\Phi_1^{(in)} \Phi_2^{(in)} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \rangle_\xi, \quad (8)$$

角标 ξ 表示对所有内部坐标积分.

很易得到如下关系式:

$$\iint \Gamma_l(R, S) \mathcal{L}_l(R, R') \Gamma_l(R', S') dR dR' = \mathcal{H}_l(S, S') \quad (9)$$

\mathcal{H}_l 为 GCM 积分核 $\mathcal{H}(\mathbf{S}, \mathbf{S}')$ 的 l 分波部分.

$$\Gamma_l(R, S) = 4\pi R S \left(\frac{2}{\pi b^2} \right)^{\frac{3}{2}} \mathcal{J}_l(2RS/b^2) e^{-(R^2+S^2)/b^2} \quad (10)$$

\mathcal{J}_l 为虚变量球贝塞尔函数.

在绝热近似假定下, 可以认为 α 粒子的大小随二 α 的接近而变化, 即在我们的模型中, 决定 α 大小的参数 b 应是二 α 平均间距 S 的某种函数. 我们假定, 这个函数可以由对 S 的每一确定值, 使体系总能量取得极小值的变分法来确定, 即 $b(S)$ 由下式给出:

$$\delta_b \left[\frac{\langle \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) | H | \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) \rangle}{\langle \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) | \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}) \rangle} \right] = 0, \quad (11)$$

角标 “ b ” 表示对 b 变分.

如果我们假定 b 还与轨道角动量 l 有关, 也可由下式得到 $b(s, l)$:

$$\delta_b \left[\frac{\langle \Phi_l(x, s) | H | \Phi_l(x, s) \rangle}{\langle \Phi_l(x, s) | \Phi_l(x, s) \rangle} \right] = 0. \quad (12)$$

这里, Φ_l 为 Φ 的角动量投影波函数.

类似 Mito 等^[1], 本文选取如下的试探波函数:

$$g_l(R) = \sum_{i=1}^N C_i \Gamma_i(R, S_i) + \hat{A}_l(k, R) + a_l \hat{G}_l(k, R), \quad (13)$$

$$a_l = \text{tg } \delta_l, \quad (14)$$

δ_l 为散射相移, k 为入射波数.

按 Kohn 变分法, 可得如下方程组(见附录):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N K_{ij} C_j + K_{ig} a_l &= -K_{if}, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N K_{gj} C_j + K_{gg} a_l &= -K_{gf}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

解此方程组可得散射相移和波函数.

三、计算结果

计算中, 采用的核力为 VOLKOV no. 1 力, 取 $m = 0.56$. 这不仅是由于此力在微观多体理论计算中广为采用, 更主要的是有如下事实: 散射相移对二体核力的交换性质是比较敏感的, 而且近些年来, 不少采用多种核力的计算结果表明, 此力能给出较符合实验的结果^[2]. 因此, 作为以检验某些物理效应为目标的计算, 采用此力是合适的. 计算中, 选取 $N = 8$, S 从 2.5fm 到 6fm. b 不随 S 变化的计算结果可同共振群方法计算结果比较, 它们几乎相同, 这说明试探波函数 (13) 的选取是适宜的.

图 1 是由变分法确定的 b 随 S 的变化. 点线 $b = 1.375$ fm 为自由 α 粒子能量 (包括库仑能) 取极小的变分结果, 它对应的均方根半径为 1.45fm; 虚线曲线表示 $b = b(S)$, 由 (11) 式确定; 实线有 0^+ 、 2^+ 和 4^+ 三条曲线, 它们表示 $b = b(s, l)$, 由 (12) 式确定. 从曲线可见, 随着二 α 粒子相互靠近, α 的大小表现出先变大再缩小, 而后再变大的图象. 当 S 很大时, 它们趋于自由 α 大小. 这大体上可由核力的吸引、排斥和泡利原理的作用来定性说明^[3].

图 2 为 α - α 散射相移. 点线表示没有考虑 α 大小变化的结果. 它表明, 对 $l = 0$ 相

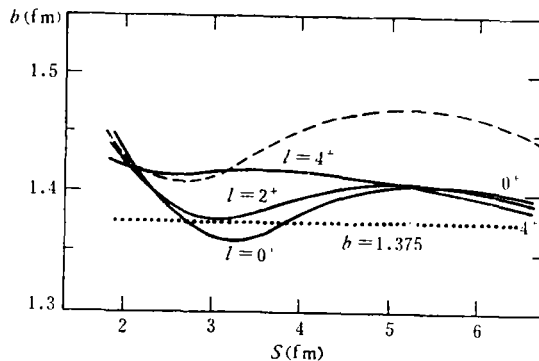


图 1 参数 b 随平均间距 S 的变化 点线为 $b = 1.375$ fm; 虚线为 $b = b(S)$, 由 (11) 式确定; 三条实线为由 (12) 式确定的 $b = b(s, l)$

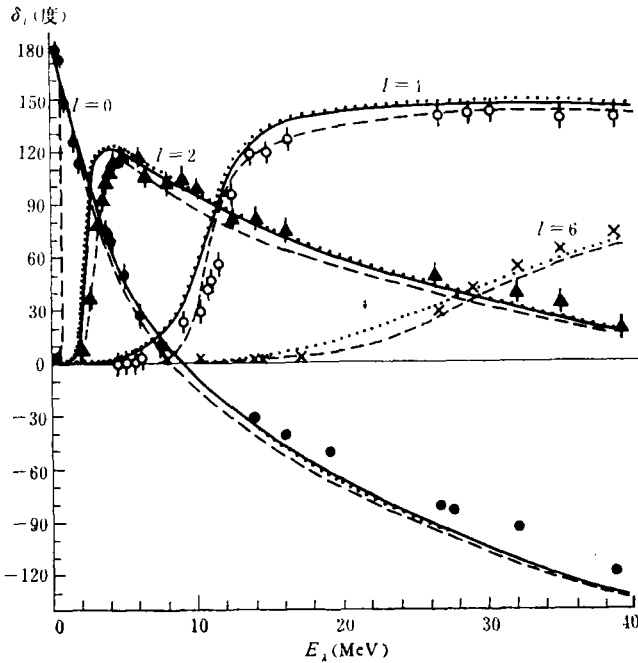


图2 α - α 散射相移 δ_l 随入射能 E_l (质心系) 的变化 点线为 $b = 1.375 \text{ fm}$ 情况; 虚线为 $b = b(S)$ 情况; 实线为 $b = b(s, l)$ 情况. 实验值取自文献[5]

● $l = 0$ ▲ $l = 2$ ◆ $l = 4$ × $l = 6$

移, 理论值同实验值符合较好, 只在高能段过低于实验值; $l = 2, 4$ 理论曲线大体符合实验值, 但在共振能区理论值过高. 这是从二体核力出发的这类微观模型计算中, 目前存在的主要不足之一. 近似地考虑了 α 大小变化后, 对此不足有所改善. 图中实线为按 $b = b(s, l)$ 的计算结果, 而虚线曲线为按 $b = b(S)$ 的计算结果. 它们同点线相比较说明, α 大小变化效应对散射相移有明显的影 响, 而且这种影响在共振能区(它对应着 ${}^8\text{Be}$ 的 $0^+, 2^+, 4^+$ 等能级)影响更大, 即共振能区散射对大小变化更加敏感. 由图可见, 在低能区, 特别是在重要的共振能区, 考虑 α 大小变化后, 对计算结果有一定改进, 而虚线情况与实验符合的更好些. 虚线较点线, 计算结果有较大改变是由于 $b = b(S)$ 表现了在核力作用范围内, α 的大小对自由 α 大小的更大偏离(见图 1). 在 高能段区, 理论值一般都低于实验值. 这种不足暗示可能在高能区应考虑非弹性道的影响, 或许还应考虑 b 与入射能的某种关系.

图 3 为相对运动波函数 $\tilde{g}_l(R)$ 的内部振荡性质. 这一性质在二个复杂核散射问题中具有普遍意义. $\tilde{g}_l(R)$ 由 $g_l(R)$ 去掉泡利伪态 $g_i(R)$ 得到.

$$\tilde{g}_l(R) = g_l(R) - \sum_i \langle g_i | g_l \rangle g_i(R). \quad (16)$$

关于内振荡的性质, 以及由此表明的二 α 间相互作用的基本性质和特点已有不少专门论述^[4]. 本文计算结果与这些文章的结论是一致的, 在此不再重述, 这里仅说明 α 大小变化的影响. 图中 $\tilde{g}_l(R)$ 已按使最外节点以外的最大波幅为 1 来归一化. 实线为未考虑

α 大小变化的情况,而虚线为考虑这一变化的情况. 由图可见,两种情况的内振荡 ($R < 2\text{fm}$) 振幅差不多相等,而虚线的最外节点稍向外移. 这说明,考虑 α 大小变化后,二 α 间相互作用的“结构排斥心”强度差不多,但斥心半径稍有变大. 这同 $b = b(S)$ 曲线(图 1) 表明的二 α 接近到相互作用力程后, α 本身变大的图象是直观地一致的.

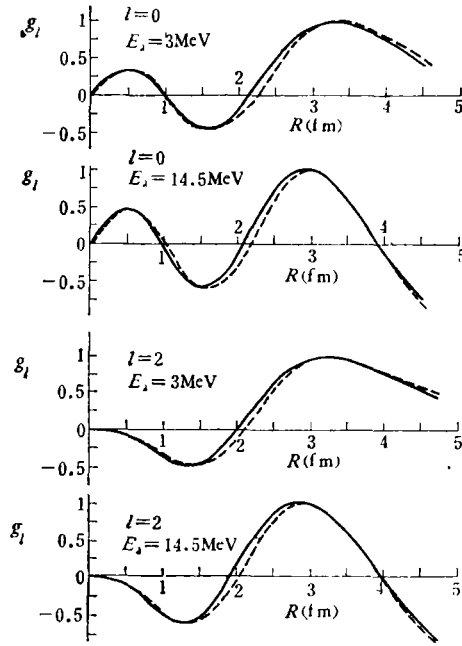


图 3 相对运动波函数 $g_l(R)$ 实线为 $b = 1.375 \text{ fm}$ 情况,虚线为 $b = b(S)$ 情况. 波函数均按内振荡最外节点外的波幅为 1 来归一化

四、结 语

从上述结果可见,虽然 α 本身“坚硬”,散射中大小改变并不很大,但这一变化对散射有明显影响. 预计对某些更“软”核(例如氦核)的散射,这一效应影响更明显. 因此,我们认为,在复杂核散射相移的精确计算中,似应考虑这种影响,甚至应考虑更多的集体形态的变化,例如核的形状变化等. 尤其对更重核的散射,这些效应会变得重要起来. 如果可以用 α 集团模型来描写某些更重核,那么本文的计算方案可以较直接地应用于这些更重核的散射. 例如可以在波函数中引入反应核大小、形状的结构参数来代替本文计算中的参数 b .

我们对金星南同志的帮助表示感谢.

附 录

文中(13)式中的

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}_l(k, R) &= F_l^{(in)}(k, R) + F_l^{(ex)}(k, R), \\ F_l^{(in)}(k, R) &= \sum_{i=N-2}^N B_i \Gamma_i(R, S_i), \\ F_l^{(ex)}(k, R) &= \begin{cases} 0 & (R < R_0) \\ F_l(k, R) - F_l^{(in)}(k, R), & (R \geq R_0) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

$F_l(k, R)$ 为库仑波函数. 取 $R_0 = (S_{N-1} + S_N)/2$.

B_i 由如下条件确定,

$$\left. \begin{aligned} F_l^{(in)}(k, R_0) &= F_l(k, R_0), \\ \left. \frac{dF_l^{(in)}(k, R)}{dR} \right|_{R=R_0} &= \left. \frac{dF_l(k, R)}{dR} \right|_{R=R_0}, \\ F_l^{(in)}(k, S_{N-2}) &= F_l(k, S_{N-2}), \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$\hat{G}_l(k, R)$ 形式同于 \hat{F}_l , 但 (1a) 式中 B_i 换为 A_i , 并 A_i 由类似 (2a) 的条件确定.

引入量

$$\left. \begin{aligned} J[g_l] &= a_l + \gamma \langle g_l \mathcal{L}_l g_l \rangle, \\ \langle g_l \mathcal{L}_l g_l \rangle &\equiv \iint g_l(R) \mathcal{L}_l(R, R') g_l(R') dR dR', \\ \gamma &= -2\mu / (k\hbar^2), \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

μ 为约化质量.

用文献 [1] 中方法可证明 $\delta J[g_l] = 2\gamma \langle \delta g_l \mathcal{L}_l g_l \rangle$, 因此, 由 $\delta J[g_l] = 0$ 得到文中的方程 (15), 并有

$$\left. \begin{aligned} a_l &= J[g_l], \\ \Delta a_l &= \gamma \langle \hat{F}_l \mathcal{L}_l g_l \rangle, \\ \text{tg } \delta_l &= a_l + \Delta a_l. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

引入

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{ij} &\equiv \int_{R_0}^{\infty} \Gamma_i(R, S_i) \mathcal{L}_l^{(0)}(R) \Gamma_j(R, S_j) dR, \\ \mathcal{L}_l^{(0)}(R) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} - E_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

文中 (15) 式中的系数可写为,

$$\left. \begin{aligned} K_{ii} &= \mathcal{H}_l(S_i, S_i) \equiv \mathcal{H}_{ii}, \\ K_{ig} &= \sum_{i=N-2}^N A_i (\mathcal{H}_{ii} - \mathcal{L}_{ij}), \\ K_{if} &= \sum_{i=N-2}^N B_i (\mathcal{H}_{ii} - \mathcal{L}_{ij}), \\ K_{gg} &= \sum_{i,j=N-2}^N A_i A_j (\mathcal{H}_{ii} - \mathcal{L}_{ij}), \\ K_{gf} &= \sum_{i,j=N-2}^N A_i B_j (\mathcal{H}_{ii} - \mathcal{L}_{ij}), \\ K_{gi} &= K_{ig}. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

参 考 文 献

- [1] Yoshihide Mito and Masayasu Kamimura, *Prog. Theor. Phys.*, **56**(1976), 583.
- [2] R. Beck, et al., *Nucl. Phys.*, **A244**(1975), 58.
- [3] 陈永寿、卢兆启、巫光汉, *高能物理与核物理*, **2**(1978), 267.
- [4] R. Tamagaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl. Extra Number* (1968), 242.
- [5] S. A. Afzal et al., *Rev. Mod. Phys.*, **41**(1969), 247; D. J. Bredin et al., *Proc. Roy. Soc.*, **A251** (1959), 143.

THE AFFECTION OF SIZE CHANGE OF α PARTICLE ON THE α - α SCATTERING

CHEN YONG-SHOU ZHENG YU-MING LU ZHAO-QI

(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This article gives an approach to the calculation of the scattering phase shift taking into account the effect of the size change of scattering nuclei. As an example, we have calculated the phase shift of α - α scattering. Firstly, we calculate the size change of the α particle with the generator coordinate (the mean distance between the two particles by the variations method based on the microscopic many body theory of the double well centre shell model, and secondly, calculate the phase shift by Kohn variational method choosing such trial wave function so that we can use the relation of the GCM and the RGM. The results shows that there are considerable affection of the size change of the α particle on the phase shift and some improvements for the theoretical values of the phase shift has been obtained.