第4卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 1
1980年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1980

秩2紧致单纯李群的不可约表示(I)

孙 洪 洲
(北京大学物理系)

摘　　要

本文分析了 SU_3 群无穷小算子的对易关系，发现 SU_3 群的8个无穷小算子可以按其在 SU_2 子群下的变换性质表示为：一个标量算符 A，一组角动量算符 L_1, L_0, L_{-1} 及两组秩为1/2的不可约张量算符 $T_{\pm1/2}$, $V_{\pm1/2}$. 利用 SU_3 群无穷小算子的这个性质，可以容易地求出 SU_3 群的所有有限维不可约表示，SU_3 群的约化系数等等.

本文给出了在 SU_3 群的不可约表示 $(\lambda\mu)$ 中所有的无穷小算子对应的矩阵，从而完全确定了不可约表示 $(\lambda\mu)$ 及其表示空间 $R^{(\lambda\mu)}$. 我们还给出了 SU_3 群约化系数标量因子所满足的方程组和对称关系并给出了 $(\lambda\mu)\otimes(10)$, $(\lambda\mu)\otimes(01)$, $(\lambda\mu)\otimes(20)$, $(\lambda\mu)\otimes(11)$ 约化系数标量因子的代数表达式.

在本文最后，我们定义了 SU_3 群的不可约张量算符并证明了相应的 Wigner-Eckart 定理.

本文中所用的方法完全可以推广到其他紧致单纯李群中去，在相继的两篇文章中我们用类似的方法讨论了 C_2, B_2, G_2 群的不可约表示.

一、引　　言

我们知道存在着四种秩2紧致单纯李群[1-3]即3维特殊么正群 $SU_3(A_2)$, 5维旋转群 $R_5(B_2)$, 2维辛群 $SP_2(C_2)$, 以及例外群 G_2. 近年来发现相当广泛的物理问题与秩2紧致单纯李群有密切的联系. 例如，在核结构方面 SU_3 群与原子核的集体转动有关[4,5], C_2 群与原子核的四极表面振动有关[6,7], 而 B_2 群与原子核内核子的对相互作用有关[8,9].

在这些秩2李群中，讨论得最多的是 SU_3 群. 对于 SU_3 群已经解决了许多问题，如 SU_3 群的不可约表示，直乘的分解，约化系数[12,13,15]. 但是所用的方法只适用于 SU_n 群，不能推广到其他李群. 此外 SU_3 群的约化系数，虽有一些数值表[14,16]，及一般表达式[13,15]，但简明的代数表达式还没有给出.

至于 SU_n 群的不可约表示，约化系数等问题也有许多人进行过讨论[15,17,18].

我们知道，李群的理论是很完整的，对于单纯李群，我们可划出它的根图，权图[1-3]. 根据这些性质，应该可以解决求李群的不可约表示，直乘分解，约化系数等问题. 但是，实际

本文1978年12月8日收到.

上在解决问题时，这样作下去是有困难的，这困难在于[3,17]。

1. 除了最高权以外，其他的权一般讲都是多重的，这样如何来标记属于这个权的本征矢量？ Racah[1,3] 指出，需要引入 $(N-3l)/2$ (N, l 分别是单纯李群的阶与秩) 个附加算符，但是如何选取还没有解决。

2. 李群除了秩 1 李群外，都不是简单可约的，即两个不可约表示的直乘所包含的不可约表示的次数大于 1. 这样就产生了在求直乘分解时如何标记这样的不可约表示的问题。

我们从分析秩 2 单纯李群的根图出发，对秩 2 单纯李群解决了以上两个问题，而且这个方法是可以推广到秩大于 2 的李群中去的。

我们所用的方法与前面所述的一些作者所用的方法比较起来是简单的，而且不需要有对称群 U 群表示论的基本知识。此外，我们给出的 SU_3 群不可约表示的表达式也比较简单，而且给出了一些常用的约化系数的简明的代数表达式。

在以下的两篇文章中，用同样的方法解决了 C_2, B_2 G_2 群的问题。

用这个方法还可以求得秩 2 单纯李群的一些无穷维表示。

用这个方法也可以求阶化李代数的不可约表示。

二、SU_3 群

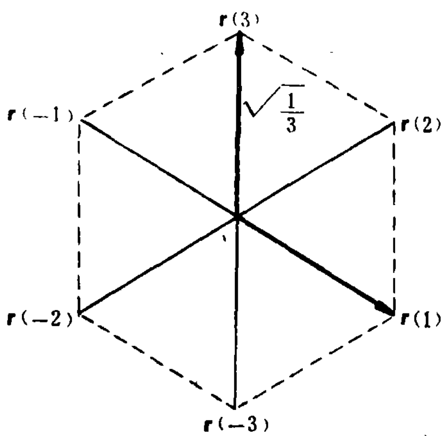
1. SU_3 群的无穷小算子

SU_3 群的根图由图 1 给出[1-3]，我们把 SU_3 群的 8 个无穷小算子取为

$$
\begin{aligned}
&A \equiv X_1 = 3H_1;\\
&L_1 \equiv X_2 = -\sqrt{3}\,E_3,\quad L_0 \equiv X_3 = \sqrt{3}\,H_2,\quad L_{-1} \equiv X_4 = \sqrt{3}\,E_{-3};\\
&T_{\frac{1}{2}} \equiv X_5 = \sqrt{3}\,E_2,\quad T_{-\frac{1}{2}} \equiv X_6 = \sqrt{3}\,E_1;\\
&V_{\frac{1}{2}} \equiv X_7 = \sqrt{3}\,E_{-1},\quad V_{-\frac{1}{2}} \equiv X_8 = -\sqrt{3}\,E_{-2}.
\end{aligned}
\tag{2.1-1}
$$

它们满足以下的对易关系

$$
\begin{aligned}
&[A, L_s] = 0,\\
&[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1},\\
&[L_1, L_{-1}] = -L_0;\\
&[A, T_q] = \frac{3}{2}T_q,\\
&[L_0, T_q] = qT_q,
\end{aligned}
$$



$N_{31} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

a SU_3 群的根图(黑线为素根)

b SU_3 群的邓金图

图 1

$$[L_{\pm1}, T_q] = \mp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp q\right)\left(\frac{1}{2}\pm q+1\right)\right\}^{\frac{1}{2}} T_{q\pm1};$$

$$[A, V_q] = -\frac{3}{2}V_q,$$

$$[L_0, V_q] = qV_q,$$

$$[L_{\pm1}, V_q] = \mp\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\mp q\right)\left(\frac{1}{2}\pm q+1\right)\right\}^{\frac{1}{2}} V_{q\pm1};$$

$$[T_q, T_{q'}] = 0,$$

$$[V_q, V_{q'}] = 0. \tag{2.1-2}$$

从(2.1-2)可以看出：L_0, $L_{\pm1}$ 构成一组角动量，A 是个标量，而 $T_{\pm\frac{1}{2}}$, $V_{\pm\frac{1}{2}}$ 各构成一组秩为 1/2 的不可约张量．具体计算可得

$$(VT)^1_s - (TV)^1_s = \sqrt{\frac{1}{2}}L_s,$$

$$(VT)^0_0 + (TV)^0_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}A. \tag{2.1-3}$$

其中

$$(VT)^\xi_s = \sum_{qq'}\left\langle\frac{1}{2}q\,\frac{1}{2}q'\middle|\xi s\right\rangle V_qT_{q'},$$

$$(TV)^\xi_s = \sum_{qq'}\left\langle\frac{1}{2}q\,\frac{1}{2}q'\middle|\xi s\right\rangle T_qV_{q'}, \tag{2.1-3'}$$

系数 $\left\langle\frac{1}{2}q\,\frac{1}{2}q'\middle|\xi s\right\rangle$ 是 C. G. 系数．

由 (2.1-1) 还可以得到

$$T_q = (-)^{\frac{1}{2}+q}(V_{-q})^+. \tag{2.1-4}$$

SU_3 群的 Casimir 算子可以写为

$$C = \frac{1}{3}\left\{L^2 + \frac{1}{3}A(A+3) + 2\sqrt{2}(VT)^0_0\right\}. \tag{2.1-5}$$

2. SU_3 群的不可约表示

为了完全标记 SU_3 群的不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的基矢，除了算符 $A = 3H_1$ 和 $L_0 = \sqrt{3}H_2$ 以外，需要 $f = \frac{1}{2}(8 - 3\times 2) = 1$ 个外加算符[1—3]，我们选这个外加算符为

$$L^2 = -L_1L_{-1} - L_{-1}L_1 + L_0^2.$$

即我们选 A, L^2, L_0 的共同本征函数

$$\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle$$

为 SU_3 群不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的表示空间 $R^{(\lambda\mu)}$ 的基矢．

$$A\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \varepsilon\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle,$$

$$L^2\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=\Lambda(\Lambda+1)\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle,$$

$$L_0\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=K\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle. \qquad (2.2\text{-}1)$$

这时对应于无穷小算子 A, L_0, $L_{\pm1}$, $T_{\pm\frac{1}{2}}$, $V_{\pm\frac{1}{2}}$ 的矩阵为:

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|A\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=\epsilon\delta(\epsilon'\epsilon)\delta(\Lambda'\Lambda)\delta(K'K),$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|L_0\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=K\delta(\epsilon'\epsilon)\delta(\Lambda'\Lambda)\delta(K'K),$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|L_{\pm1}\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=\mp\left\{\frac{1}{2}(\Lambda\mp K)(\Lambda\pm K+1)\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\delta(\epsilon',\epsilon)\delta(\Lambda',\Lambda)\delta(K',K\pm1),$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|T_{\pm\frac{1}{2}}\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon+\frac{3}{2}\Lambda'\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle\cdot$$

$$\frac{\left\langle\Lambda K\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\middle|\Lambda'K'\right\rangle}{\sqrt{(2\Lambda'+1)}}\delta\left(\epsilon',\epsilon+\frac{3}{2}\right),$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|V_{\pm\frac{1}{2}}\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon-\frac{3}{2}\Lambda'\end{matrix}\right\|V\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle\cdot$$

$$\frac{\left\langle\Lambda K\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\middle|\Lambda'K'\right\rangle}{\sqrt{(2\Lambda'+1)}}\delta\left(\epsilon',\epsilon-\frac{3}{2}\right). \qquad (2.2\text{-}2)$$

由 (2.1-4) 可得

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon+\frac{3}{2}\Lambda'\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle=(-)^{\Lambda'+\frac{1}{2}-\Lambda}\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\|V\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon+\frac{3}{2}\Lambda'\end{matrix}\right\rangle. \qquad (2.2\text{-}3)$$

由 (2.1-3) 可以得到

$$D_\epsilon(\Lambda'\Lambda',\Lambda\tilde{\Lambda})=F_0\delta(\Lambda,\tilde{\Lambda})+F_1D_{\epsilon+\frac{3}{2}}\left(\Lambda\tilde{\Lambda},\Lambda-\frac{1}{2}\Lambda-\frac{1}{2}\right)$$

$$+F_2D_{\epsilon+\frac{3}{2}}\left(\Lambda\tilde{\Lambda},\Lambda+\frac{1}{2}\Lambda+\frac{1}{2}\right), \qquad (2.2\text{-}4)$$

其中

$$D_\epsilon(\Lambda'\tilde{\Lambda}',\Lambda\tilde{\Lambda})=\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon-\frac{3}{2}\Lambda'\end{matrix}\right\|V\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon-\frac{3}{2}\tilde{\Lambda}'\end{matrix}\right\|V\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\tilde{\Lambda}\end{matrix}\right\rangle. \qquad (2.2\text{-}4')$$

系数 F_0, F_1, F_2 由表 1 给出

SU_3 群不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的表示空间 $R^{(\lambda\mu)}$ 的基矢之间有以下关系

表 1　系数 F_0, F_1, F_2

Λ'　Λ　$\tilde{\Lambda}$	F_0	F_1	F_2
$\Lambda-\frac{1}{2}$　Λ　Λ	$\Lambda(\varepsilon+\Lambda+1)$	$-\frac{1}{2\Lambda+1}$	$\frac{2\Lambda}{2\Lambda+1}$
$\Lambda+\frac{1}{2}$　Λ　Λ	$(\Lambda+1)(\varepsilon-\Lambda)$	$\frac{2\Lambda+2}{2\Lambda+1}$	$\frac{1}{2\Lambda+1}$
$\Lambda+\frac{1}{2}$　Λ　$\Lambda+1$			1

$$\sqrt{(2\Lambda'+1)}\left\{V\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda\end{matrix}\right.\right\rangle\Bigg\}_{\Lambda'K'}=\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon-\frac{3}{2}\ \Lambda'\end{matrix}\|V\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon-\frac{3}{2}\ \Lambda'K'\end{matrix}\right\rangle, \tag{2.2-5}$$

其中

$$\left\{V\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda\end{matrix}\right.\right\rangle\Bigg\}_{\Lambda'K'}=\sum_{qK}\left\langle\Lambda K\ \frac{1}{2}\ q\right|\Lambda'K'\Big\rangle V_q\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle. \tag{2.2-5'}$$

由[3]知 SU_3 群的不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的最高权 $\boldsymbol{W}$ 满足以下两条件

$$\frac{2\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{r}(1)}{|\mathbf{r}(1)|^2}=\lambda,$$

$$\frac{2\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{r}(3)}{|\mathbf{r}(3)|^2}=\mu. \tag{2.2-6}$$

$\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(3)$ 是 SU_3 群的素根，这对应于

$$\varepsilon_{\max}=\frac{1}{2}(2\lambda+\mu),\quad \Lambda_0=\frac{\mu}{2} \tag{2.2-6'}$$

其中 $\varepsilon_{\max}$ 是 SU_3 群不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的表示空间 $R^{(\lambda\mu)}$ 中 ε 的最大可取值，而 Λ_0 是当 ε 取 $\varepsilon_{\max}$ 时 Λ 所取的值. 把 (2.2-6) 代入 (2.2-4) 经反复运算可得

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon-\frac{3}{2}\ \Lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\|V\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle=\left\{\frac{1}{2}(a+2)(a+1-\mu)(\lambda+\mu-a)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon-\frac{3}{2}\ \Lambda-\frac{1}{2}\end{matrix}\|V\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle=-\left\{\frac{1}{2}(b+1)(\mu-b)(\lambda+\mu+1-b)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2-7}$$

其中

$$\varepsilon=(\lambda+2\mu)-\frac{3}{2}(a+b),$$

$$\Lambda=\frac{1}{2}(a-b); \tag{2.2-7'}$$

在 (2.2-7) 中 a, b 的可取值为

$$a=\mu,\ \mu+1,\ \cdots\ \mu+\lambda,$$

$$b=0,\quad 1,\quad \cdots\quad \mu. \tag{2.2-7''}$$

利用 (2.2-7″) 可以得到 SU_3 群的不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的维数

$$d^{(\lambda\mu)} = (\lambda+1)(\mu+1)\left(1+\frac{\lambda+\mu}{2}\right). \tag{2.2-8}$$

在不可约表示$(\lambda\mu)$中，SU_3群的 Casimir 算子所对应的矩阵为

$$\left\langle \begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\middle| C \middle| \begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{9}\{(\lambda+3)(\lambda+\mu)+\mu^2\}\delta(\epsilon',\epsilon)\delta(\Lambda',\Lambda)\delta(K',K). \tag{2.2-9}$$

这样，我们就求得了SU_3群的不可约表示$(\lambda\mu)$.

3. SU_3群的约化系数

(a) SU_3群的约化系数及其对称关系

设 SU_3群的两个不可约表示$(\lambda_1\mu_1)$，$(\lambda_2\mu_2)$的表示空间是$R^{(\lambda_1\mu_1)}$，$R^{(\lambda_2\mu_2)}$. 它们的基矢分别是$\left|\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1)\\ \epsilon_1\Lambda_1K_1\end{matrix}\right\rangle$，$\left|\begin{matrix}(\lambda_2\mu_2)\\ \epsilon_2\Lambda_2K_2\end{matrix}\right\rangle$. 为了书写方便，我们分别用$\Gamma_1$，$\Gamma_2$标记$(\lambda_1\mu_1)$，$(\lambda_2\mu_2)$；而用$\gamma_1$，$\gamma_2$标记$\epsilon_1\Lambda_1K_1$，$\epsilon_2\Lambda_2K_2$.

一般讲，R^{Γ_1}，R^{Γ_2}的直乘空间 $R^{\Gamma_1}\otimes R^{\Gamma_2}$ 并不是SU_3群的一个不可约表示的表示空间. 但是$R^{\Gamma_1}\otimes R^{\Gamma_2}$可以分解为$SU_3$群的一些不可约表示$\Gamma$的表示空间$R^\Gamma$的直和，而$R^\Gamma$的基矢可以写为

$$\left|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle = \sum_{\gamma_1\gamma_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\end{matrix}\right\rangle. \tag{2.3-1}$$

组合系数$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle$称为$SU_3$群的约化系数，量子数$n$是流动指标.

由于Γ是SU_3群的不可约表示，所以约化系数满足以下方程

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma'\end{matrix}\middle|X_i\middle|\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle &= \sum_{\gamma_1'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\end{matrix}\middle|X_{1i}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1' & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\\ &+\sum_{\gamma_2'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\end{matrix}\middle|X_{2i}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle,\\ &i=1,2,3\cdots 8.\end{aligned} \tag{2.3-2}$$

我们规定相因子，使得约化系数为实数并且

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \hat{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \hat{\gamma}\end{matrix}\right\rangle > 0. \tag{2.3-3}$$

其中$\hat{\gamma}$表示对应于最高权态的一组$\epsilon\Lambda K$值，而$\tilde{\gamma}$表示ϵK确定时Λ取最大可取值时的一组$\epsilon\Lambda K$值.

这样，约化系数满足的正交归一条件可以写为

$$\sum_{\gamma_1\gamma_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma'\\ \gamma'\end{matrix}\right\rangle = \delta(n,n')\delta(\Gamma,\Gamma'),\ \delta(\gamma,\gamma').$$

$$\sum_{n\Gamma}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1' & \gamma_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle = \delta(\gamma_1,\gamma_1')\delta(\gamma_2,\gamma_2'). \tag{2.3-4}$$

从原则上讲，解 (2.3-2)，(2.3-3) 即可得到 SU_3 群的约化系数 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle$. 若 (2.3-2) 仅仅有一组非 0 解，则说明 $R^{\Gamma_1}\otimes R^{\Gamma_2}$ 仅包含 R^{Γ} 一次，若 (2.3-2) 有 f 组非 0 独立解，则表明 $R^{\Gamma_1}\otimes R^{\Gamma_2}$ 包含 R^{Γ} f 次。

从(2.3-2)我们可以看出 SU_3 群的约化系数满足以下的对称关系

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\,\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\right\rangle=\sum_{n'}A_{n'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\dot\Gamma_1 & \dot\Gamma_2\\ \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\,\dot\Gamma_3\\ \bar\gamma_3\end{matrix}\right\rangle=\sum_{n'}B_{n'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \dot\Gamma_3\\ \gamma_1 & \bar\gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\,\dot\Gamma_2\\ \bar\gamma_2\end{matrix}\right\rangle=\sum_{n'}C_{n'}(-)^{\epsilon_1+K_1}\sqrt{\frac{d^{(\Gamma_2)}}{d^{(\Gamma_3)}}}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\right\rangle. \tag{2.3-5}$$

其中 $d^{(\Gamma)}$ 标记不可约表示 Γ 的维数，$\dot\Gamma$ 是不可约表示 Γ 的共轭表示 (即 $\Gamma=(\lambda\mu)$，$\dot\Gamma=(\mu\lambda)$)，$\bar\gamma$ 标记 $-\epsilon\Lambda-K$，而实数 $A_{n'}B_{n'}C_{n'}$ 满足

$$\sum_{n}A_{n'}^2=\sum_{n'}B_{n'}^2=\sum_{n'}C_{n'}=1. \tag{2.3-5'}$$

(b) 约化系数标量因子及其对称关系

从 (2.3-2) 及 (2.3-3) 可以看出

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\,\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\,\Gamma_3\\ \epsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle\langle\Lambda_1K_1\Lambda_2K_2|\Lambda_3K_3\rangle, \tag{2.3-6}$$

其中 $\langle\Lambda_1K_1\Lambda_2K_2|\Lambda_3K_3\rangle$ 是 C-G. 系数，系数 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\,\Gamma_3\\ \epsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle$ 称为约化系数标量因子。

把 (2.3-6) 代入 (2.3-2) 可以得到约化系数标量因子所满足的方程组

$$\sum_{\epsilon_1'\Lambda_1'\epsilon_2'\Lambda_2'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\Lambda\,\|V_1+V_2\|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1'\Lambda_1' & \epsilon_2'\Lambda_2'\end{matrix}\Lambda'\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1'\Lambda_1' & \epsilon_2'\Lambda_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \epsilon'\Lambda'\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \epsilon\ \Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \epsilon\ \Lambda\end{matrix}\|V\|\begin{matrix}\Gamma\\ \epsilon'\Lambda'\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\sum_{\epsilon_1'\Lambda_1'\epsilon_2'\Lambda_2'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1'\Lambda_1' & \epsilon_2'\Lambda_2'\end{matrix}\Lambda'\,\|V_1+V_2\|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\Lambda\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1'\Lambda_1' & \epsilon_2'\Lambda_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \epsilon'\Lambda'\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma\\ \epsilon\ \Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \epsilon'\Lambda'\end{matrix}\|V\|\begin{matrix}\Gamma\\ \epsilon\ \Lambda\end{matrix}\right\rangle; \tag{2.3-7}$$

其中

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\Lambda\,\|V_1+V_2\|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1'\Lambda_1' & \epsilon_2'\Lambda_2'\end{matrix}\Lambda'\right\rangle$$

$$=f(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda,\ \Lambda_1'\Lambda_2'\Lambda')\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1\\ \epsilon_1\Lambda_1\end{matrix}\|V_1\|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \epsilon_1'\Lambda_1'\end{matrix}\right\rangle\delta(\epsilon_2,\epsilon_2')$$

$$+g(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda,\ \Lambda_1'\Lambda_2'\Lambda')\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2\\ \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\|V_2\|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \epsilon_2'\Lambda_2'\end{matrix}\right\rangle\delta(\epsilon_1,\epsilon_1'), \tag{2.3-7'}$$

而

$$f(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda,\ \Lambda_1'\Lambda_2'\Lambda') = (-)^{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda'+\frac{1}{2}}\sqrt{(2\Lambda'+1)(2\Lambda+1)}\begin{Bmatrix}1/2 & \Lambda_1 & \Lambda_1' \\ \Lambda_2 & \Lambda' & \Lambda\end{Bmatrix}\delta(\Lambda_2,\ \Lambda_2'),$$

$$g(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda,\ \Lambda_1'\Lambda_2'\Lambda') = (-)^{\Lambda_1+\Lambda_2'+\Lambda+1/2}\sqrt{(2\Lambda'+1)(2\Lambda+1)}\begin{Bmatrix}1/2 & \Lambda_2 & \Lambda_2' \\ \Lambda_1 & \Lambda' & \Lambda\end{Bmatrix}\delta(\Lambda_1,\ \Lambda_1'),$$

(2.3-7″)

式中 $\begin{Bmatrix}\cdots \\ \cdots\end{Bmatrix}$ 是 $6j$ 系数．

约化系数标量因子的相因子的选择为

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hat{\varepsilon}_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\tilde{\Lambda}_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ \Gamma \\ \hat{\varepsilon}\Lambda\end{matrix}\right\rangle > 0; \tag{2.3-8}$$

约化系数标量因子的正交归一化条件为

$$\sum_{\varepsilon_1\Lambda_1\varepsilon_2\Lambda_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma \\ \varepsilon & \Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma' \\ \varepsilon\ \ \Lambda\end{matrix}\right\rangle = \delta(n,\ n')\delta(\Gamma,\ \Gamma');$$

$$\sum_{n\Gamma}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma \\ \varepsilon & \Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1'\Lambda_1' & \varepsilon_2'\Lambda_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma \\ \varepsilon & \Lambda\end{matrix}\right\rangle = \delta(\varepsilon_1,\ \varepsilon_1')\delta(\Lambda_1,\ \Lambda_1')\delta(\varepsilon_2,\ \varepsilon_2')\cdot\delta(\Lambda_2,\ \Lambda_2').$$

(2.3-9)

解(2.3-7)比解(2.3-2)简单得多．解(2.3-7)我们得到了 $(\lambda_1\mu_1)\otimes(10)$ 和 $(\lambda_1\mu_1)\otimes(01)$ 的约化系数．所得结果在表2中给出．

由(2.3-5)可以得到 SU_3 群约化系数标量因子所满足的对称关系

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_1 \\ \varepsilon_2\Lambda_2 & \varepsilon_1\Lambda_1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\,\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle = (-)^{\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3}\sum_{n'}A_{n'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\dot{\Gamma}_1 & \dot{\Gamma}_2 \\ -\varepsilon_1\Lambda_1 & -\varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \dot{\Gamma}_3 \\ -\varepsilon_3 & \Lambda_3\end{matrix}\right\rangle = (-)^{\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3}\sum_{n'}B_{n'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \dot{\Gamma}_3 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & -\varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \dot{\Gamma}_2 \\ -\varepsilon_2 & \Lambda_2\end{matrix}\right\rangle = (-)^{\varepsilon_1+\Lambda_1}\sqrt{\frac{d^{(\Gamma_2)}(2\Lambda_3+1)}{d^{(\Gamma_3)}(2\Lambda_2+1)}}\sum_{n'}C_{n'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle.$$

(2.3-10)

其中

$$\sum_{n'}A_{n'}^2 = \sum_{n'}B_{n'}^2 = \sum_{n'}C_{n'}^2 = 1.$$

当 $R^{\Gamma_1}\otimes R^{\Gamma_2}$ 仅包含 R^{Γ_3} 一次时，则(2.3-10)变为

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_1 \\ \varepsilon_2\Lambda_2 & \varepsilon_1\Lambda_1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle = \pm(-)^{\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\dot{\Gamma}_1 & \dot{\Gamma}_2 \\ -\varepsilon_1\Lambda_1 & -\varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\dot{\Gamma}_3 \\ -\varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle = \pm(-)^{\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \dot{\Gamma}_3 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & -\varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\dot{\Gamma}_2 \\ -\varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\right\rangle = \pm(-)^{\varepsilon_1+\Lambda_1}\sqrt{\frac{d^{(\Gamma_2)}(2\Lambda_3+1)}{d^{(\Gamma_3)}(2\Lambda_2+1)}}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3 \\ \varepsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle,$$

(2.3-10′)

其中的正负号不难从 (2.3-5) 式决定.

(c) 约化系数标量因子中流动指标 n 的确定. 通过类似于角动量偶合的计算, 可以得到

$$\sum_{n}\langle n''\Gamma''n\Gamma|n'\Gamma'\bar{n}\Gamma\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma''\\ \gamma_1 & \gamma''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sum_{\gamma_2\gamma_3\gamma'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma'\\ \gamma'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma' & \Gamma_3\\ \gamma' & \gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\bar{n}\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n''\Gamma''\\ \gamma''\end{matrix}\right\rangle. \qquad (2.3\text{-}11)$$

其中

$$\langle n''\Gamma''n\Gamma|n'\Gamma'\bar{n}\Gamma\rangle\equiv\langle[\Gamma_1(\Gamma_2\Gamma_3)n''\Gamma'']n\Gamma|[(\Gamma_1\Gamma_2)n'\Gamma'\Gamma_3]\bar{n}\Gamma\rangle$$

是 SU_3 群的归一化的 Racah 系数.

将 (2.3-6) 代入 (2.3-11) 即得

$$\sum_{n}\langle n''\Gamma''n\Gamma|n'\Gamma'\bar{n}\Gamma\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma''\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$=F(\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\bar{n}\Gamma,n'\Gamma'n''\Gamma''), \qquad (2.3\text{-}12)$$

其中

$$F(\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\bar{n}\Gamma,n'\Gamma'n''\Gamma'')=\sum_{\epsilon_2\Lambda_2\epsilon_3\Lambda_3\epsilon'\Lambda'}(-)^{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda}$$
$$\sqrt{(2\Lambda'+1)(2\Lambda''+1)}\begin{Bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda'\\ \Lambda_3 & \Lambda & \Lambda''\end{Bmatrix}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma'\\ \epsilon'\Lambda'\end{matrix}\right\rangle$$
$$\times\left\langle\begin{matrix}\Gamma' & \Gamma_3\\ \epsilon'\Lambda' & \epsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\bar{n}\Gamma\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_3\\ \epsilon_2\Lambda_2 & \epsilon_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n''\Gamma''\\ \epsilon''\Lambda''\end{matrix}\right\rangle. \qquad (2.3\text{-}12')$$

由于 $R^{(\lambda_1\mu_1)}\otimes R^{(\lambda_2 0)}$ 包含 $R^{(\lambda\mu)}$ 仅一次, 于是将 $\Gamma_1=(\lambda_1\mu_1)$, $\Gamma_2=(\lambda_2\,0)$, $\Gamma_3=(1\,0)$, $\Gamma''=(\lambda_2+1\ \ 0)$, $\Gamma'=(\lambda'\mu')$ 代入 (2.3-12) 得

$$\langle(\lambda_2+1\,0)(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2+1\ \ 0)\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon''\quad\ \Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$=F((\lambda_1\ \mu_1)(\lambda_2\ \ 0)(1\ \ 0)(\lambda\mu),(\lambda'\mu')(\lambda_2+1\ \ 0)). \qquad (2.3\text{-}13)$$

公式(2.3-13) 可以看作是 SU_3 群 $R^{(\lambda_1\mu_1)}\otimes R^{(\lambda_2 0)}$ 约化系数标量因子间的一个递推公式, 而 $\langle(\lambda_2+1\,0)(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')(\lambda\mu)\rangle$ 可以看作是一个归一化常数. 利用 (2.3-13) 我们求出了 SU_3 群 $R^{(\lambda_1\mu_1)}\otimes R^{(20)}$ 的约化系数标量因子, 利用对称关系 (2.3-10′) 我们还求出了 SU_3 群 $R^{(\lambda_1\mu_1)}\otimes R^{(02)}$ 的约化系数标量因子, 所得结果在表 2 中给出.

设 $R^{(\lambda_1\mu_1)}\otimes R^{(\lambda_2\mu_2)}$ 包含 $R^{(\lambda\mu)}f$ 次, 我们可以利用公式 (2.3-12) 来规定一种流动指标 n 的选取方法.

将 $\Gamma_1=(\lambda_1\mu_1)$, $\Gamma_2=(\lambda_2 0)$, $\Gamma_3=(0\mu_2)$, $\Gamma''=(\lambda_2\mu_2)$, $\Gamma'=(\lambda'\mu')$ 代入 (2.3-12) 得

$$\sum_{n}\langle(\lambda_2\mu_2)n(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2\mu_2)\\ \epsilon_1\Lambda_1 & \epsilon''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n(\lambda\mu)\\ \epsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$=F((\lambda_1\mu_1)(\lambda_2 0)(0\mu_2)(\lambda\mu),(\lambda'\mu')(\lambda_2\mu_2)). \qquad (2.3\text{-}14)$$

我们选取 f 个 $2\lambda'+\mu'$ 最小的 $(\lambda'\mu')$, 并将它们按 μ' 从小到大排列为

$$(\lambda'\mu')_1,\ (\lambda'\mu')_2,\ \cdots,\ (\lambda'\mu')_f.$$

我们选取流动指标 n，使得

$$\langle(\lambda_2\mu_2)1(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')_1(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2\mu_2)\\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$

$$= F((\lambda_1\mu_1)(\lambda_2 0)(0\mu_2)(\lambda\mu),\ (\lambda'\mu')_1(\lambda_2\mu_2))$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{f}\langle(\lambda_2\mu_2)n(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')_f(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2\mu_2)\\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n(\lambda\mu)\\ \varepsilon\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$

$$= F((\lambda_1\mu_1)(\lambda_2 0)(0\mu_2)(\lambda\mu),\ (\lambda'\mu')_f(\lambda_2\mu_2)). \qquad (2.3\text{-}15)$$

系数 $\langle(\lambda_2\mu_2)n(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')_i(\lambda\mu)\rangle$ $(i=1,2\cdots f)$ 可以由约化系数标量因子的正交归一化性质及相因子的选择所确定．公式 (2.3-15) 不仅给出了一个确定流动指标 n 的方法，而且它本身也是一个求 $R^{(\lambda_1\mu_1)}\otimes R^{(\lambda_2\mu_2)}$ 约化系数的递推公式．应用公式 (2.3-15) 可以大大减小计算工作量．作为例子，我们应用公式 (2.3-15) 计算了 $R^{(\lambda_1\mu_1)}\otimes R^{(11)}$ 约化系数标量因子．所得结果在表 2 中给出．

4. SU_3 群的不可约张量与 Wigner-Eckart 定理

与 3 维旋转群类似，我们引入 SU_3 群的 Γ 秩不可约张量算符 T^{Γ}_{γ}，它与 SU_3 群的 8 个无穷小算子满足以下的对易关系．

$$[X_i T^{\Gamma}_{\gamma}] = \sum_{\gamma'} T^{\Gamma}_{\gamma'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma'\end{matrix}\middle|X_i\middle|\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle, \qquad i=1,2,\cdots 8. \qquad (2.4\text{-}1)$$

容易证明 SU_3 群的 8 个无穷小算子就构成了 SU_3 群的 (11) 秩不可约张量．

$$T^{(11)}_{3/2\,1/2\,q} = T_q,$$

$$T^{(11)}_{000} = -\frac{1}{\sqrt{3}}A,$$

$$T^{(11)}_{01s} = L_s,$$

$$T^{(11)}_{-3/2\,1/2q} = -V_q. \qquad (2.4\text{-}2)$$

还可以证明，两个不可约张量 $T^{\Gamma_1}_{\gamma_1}$，$T^{\Gamma_2}_{\gamma_2}$ 可以通过以下法则构成一个不可约张量 $T^{n\Gamma}_{\gamma}$

$$T^{n\Gamma}_{\gamma} \equiv \{T^{\Gamma_1}T^{\Gamma_2}\}^{n\Gamma}_{\gamma} = \sum_{\gamma_1\gamma_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle T^{\Gamma_1}_{\gamma_1}T^{\Gamma_2}_{\gamma_2} \qquad (2.4\text{-}3)$$

从(2.4-1)出发，容易证明 SU_3 群的不可约张量 T^{Γ}_{γ} 的矩阵元$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\middle|T^{\Gamma}_{\gamma}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\end{matrix}\right\rangle$与 SU_3 群的约化系数$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma\\ \gamma_1 & \gamma\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\right\rangle$满足相同的方程组，于是有

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\middle|T^{\Gamma}_{\gamma}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\end{matrix}\right\rangle = \sum_n\langle n\Gamma_3\|T^{\Gamma}\|\Gamma_1\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma\\ \gamma_1 & \gamma\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma_3\\ \gamma_3\end{matrix}\right\rangle \qquad (2.4\text{-}4)$$

系数 $\langle n\Gamma_3\|T^{\Gamma}\|\Gamma_1\rangle$ 称为不可约张量 T^{Γ}_{γ} 的约化矩阵元．公式(2.4-4)即是 SU_3 群的 Wignre Eckatrt 定理．

表 2　SU_3 群约化系数标量因子

$$\left\langle \begin{matrix} (\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2\mu_2) \\ \varepsilon_1\Lambda_1 & \varepsilon_2\Lambda_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n(\lambda\mu) \\ \varepsilon\Lambda \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} p_1\ q_1\ 0 & p_2\ q_2\ 0 \\ a_1\ b_1 & a_2\ b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\ p\ q\ r \\ a\ b \end{matrix} \right\rangle$$

其中　$\lambda=(p-q)$,　$\mu=(q-r)$,　$\varepsilon=p+q+r-\frac{3}{2}(a+b)$,　$\Lambda=\frac{1}{2}(a-b)$

(a) $\left\langle \begin{matrix} p\ q\ 0 & 1\ 0\ 0 \\ a_1 b_1 & a_2 b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p'\ q'\ r' \\ a\ b \end{matrix} \right\rangle$

$a_1\ b_1\ a_2\ b_2$ \\ $p'\ q'\ r'$	$p+1\quad q\quad 0$	$p\quad q+1\quad 0$	$p\quad q\quad 1$
$a\quad b\quad 0\quad 0$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-b)}{(p+2)(p+1-q)}}$	$-\sqrt{\frac{(a-q)(q+1-b)}{(q+1)(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{(a+1)b}{(p+2)(q+1)}}$
$a\quad b-1\quad 1\quad 0$	$-\sqrt{\frac{b(p+1-a)(q+1-b)}{(p+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{(a-q)b(p+2-b)}{(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{(a+1)(q+1-b)(p+2-b)}{(p+2)(q+1)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\frac{(a+1)(a-q)(p+2-b)}{(p+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{(a+1)(p+1-a)(q+1-b)}{(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(a-q)(p+1-a)b}{(p+2)(q+1)(a+1-b)}}$

(b) $\left\langle \begin{matrix} p\ q\ 0 & 1\ 1\ 0 \\ a_1\ b_1 & a_2\ b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p'\ q'\ r' \\ a\ b \end{matrix} \right\rangle$

$a_1\ b_1\ a_2\ b_2$ \\ $p'\ q'\ r'$	$p+1\quad q+1\quad 0$	$p+1\quad q\quad 1$	$p\quad q+1\quad 1$
$a\quad b-1\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(a-q)b}{(p+2)(q+1)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{(a+1)(p+1-a)(q+1-b)}{(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(a+1)(a-q)(p+2-b)}{(p+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\frac{(a+1)(p+2-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(a-q)b(p+2-b)}{(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(p+1-a)b(q+1-b)}{(p+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 1\quad 1$	$\sqrt{\frac{(a+1)b}{(p+2)(q+1)}}$	$\sqrt{\frac{(a-q)(q+1-b)}{(q+1)(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-b)}{(p+2)(p+1-q)}}$

(c). $\left\langle \begin{matrix} p & q & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & a_1 & b_1 & & a_2 & b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p' & q' & r' \\ & a & b \end{matrix} \right\rangle$

a_1 b_1 a_2 b_2 \ p' q' r'	$p+2 \quad q \quad 0$	$p+1 \quad q \quad 1$
$a \quad b \quad 0 \quad 0$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(p+2-b)(p+3-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)}}$	$\sqrt{\frac{2(a+1)(p+1-a)b(p+2-b)}{(p+1)(p+3)(q+1)(p+1-q)}}$
$a \quad b-1 \quad 1 \quad 0$	$-\sqrt{\frac{2(p+1-a)(p+2-a)b(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$	$\frac{(p+3-2b)\sqrt{(a+1)(p+1-a)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+1)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-1 \quad b \quad 1 \quad 0$	$\sqrt{\frac{2(a+1)(p+2-a)(a-q)(p+2-b)(p+3-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$	$\frac{-(p+1-2a)\sqrt{(a-q)b(p+2-b)}}{\sqrt{(p+1)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a \quad b-2 \quad 2 \quad 0$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)b(b-1)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{2(a+1)(p+1-a)(b-1)(p+3-b)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1 \quad b-1 \quad 2 \quad 0$	$-\sqrt{\frac{2(a+1)(p+2-a)(a-q)b(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(a+2-b)(a-b)}}$	$\frac{[(p+1)(a+b)-2(a-1)b]\sqrt{(a-q)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+1)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2 \quad b \quad 2 \quad 0$	$\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+2-b)(p+3-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)(a-b)}}$	$-\sqrt{\frac{2a(p+2-a)(a-q-1)(a-q)b(p+2-b)}{(p+1)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$

a_1 b_1 a_2 b_2 \ p' q' r'	$p \quad q+2 \quad 0$	$p \quad q+1 \quad 1$
$a \quad b \quad 0 \quad 0$	$\sqrt{\frac{(a-q-1)(a-q)(q+1-b)(q+2-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)}}$	$-\sqrt{\frac{2(a+1)(a-q)b(q+1-b)}{(p+2)q(q+2)(p+1-q)}}$
$a \quad b-1 \quad 1 \quad 0$	$-\sqrt{\frac{2(a-q-1)(a-q)b(p+2-b)(q+2-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\frac{(q+2-2b)\sqrt{(a+1)(a-q)(p+2-b)}}{\sqrt{(p+2)q(q+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-1 \quad b \quad 1 \quad 0$	$-\sqrt{\frac{2(a+1)(p+1-a)(a-q)(q+1-b)(q+2-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\frac{(2a-q)\sqrt{(p+1-a)b(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)q(q+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a \quad b-2 \quad 2 \quad 0$	$\sqrt{\frac{(a-q-1)(a-q)(b-1)b(p+2-b)(p+3-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{2(a+1)(a-q)(b-1)(p+2-b)(p+3-b)(q+2-b)}{(p+2)q(q+2)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1 \quad b-1 \quad 2 \quad 0$	$\sqrt{\frac{(a+1)(p+1-a)(a-q-1)b(p+2-b)(q+2-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$	$\frac{[q(a+b)-2(a-1)b]\sqrt{(p+1-a)(p+2-b)}}{\sqrt{(p+2)q(q+2)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2 \quad b \quad 2 \quad 0$	$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(q+1-b)(q+2-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$	$-\sqrt{\frac{2a(p+1-a)(p+2-a)(a-q-1)b(q+1-b)}{(p+2)q(q+2)(p+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$

$a_1\ b_1 \quad a_2\ b_2$ \ $p'\ q'\ r'$	$p+1 \quad q+1 \quad 0$	$p \quad q \quad 2$
$a \quad b \quad 0 \quad 0$	$-\sqrt{\frac{2(p+1-a)(a-q)(p+2-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)}}$	$\sqrt{\frac{a(a+1)(b-1)b}{(p+1)(p+2)q(q+1)}}$
$a \quad b-1 \quad 1 \quad 0$	$\frac{(p+q+4-2b)\sqrt{(p+1-a)(a-q)b}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{2a(a+1)(b-1)(p+2-b)(q+1-b)}{(p+1)(p+2)q(q+1)(a+1-b)}}$
$a-1 \quad b \quad 1 \quad 0$	$\frac{(p+q+2-2a)\sqrt{(a+1)(p+2-b)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{2a(p+1-a)(a-q)(b-1)b}{(p+1)(p+2)q(q+1)(a+1-b)}}$
$a \quad b-2 \quad 2 \quad 0$	$-\sqrt{\frac{2(p+1-a)(a-q)(b-1)b(p+3-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+2-b)(p+3-b)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+2)q(q+1)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1 \quad b-1 \quad 2 \quad 0$	$\frac{[(p+q+4)(a+b)-2(a+1)b-2(p+2)(q+1)]\sqrt{(a+1)b}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(a+2-b)(a-b)}}$	$-\sqrt{\frac{2a(p+1-a)(a-q)(b-1)(p+2-b)(q+1-b)}{(p+1)(p+2)q(q+1)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2 \quad b \quad 2 \quad 0$	$\sqrt{\frac{2a(a+1)(p+2-a)(a-q-1)(p+2-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)(a-b)}}$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(a-q-1)(a-q)(b-1)b}{(p+1)(p+2)q(q+1)(a+1-b)(a-b)}}$

(d) $\left\langle \begin{matrix} p & q & 0 & 2 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & & a_2 & b_2 & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p' & q' & r' \\ a & b & \end{matrix} \right\rangle$

b_1 a_1 a_2 b_2 \ p' q' r'	$p+2$ $q+1$ 0	$p+2$ q 1
a $b-1$ 1 0	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(a-q)b(p+3-b)}{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$
$a-1$ b 1 0	$\sqrt{\frac{(a+1)(p+2-a)(p+2-b)(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(p+2-a)(a-q)b(p+2-b)(p+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$
a $b-2$ 2 0	$-\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(a-q)(b-1)b(q+2-b)}{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(b-1)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1$ $b-1$ 2 0	$\frac{-(2q+2-a-b)\sqrt{(a+1)(p+2-a)b(p+3-b)}}{\sqrt{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$	$\frac{(a+b)\sqrt{(p+2-a)(a-q)(p+3-b)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2$ b 2 0	$\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q-1)(p+2-b)(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$	$-\sqrt{\frac{a(a-q-1)(a-q)b(p+2-b)(p+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)(a-b)}}$
$a-1$ $b-1$ 1 1	$\sqrt{\frac{3(a+1)(p+2-a)b(p+3-b)}{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{3(p+2-a)(a-q)(p+3-b)(q+1-b)}{2(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)}}$
$a-1$ $b-2$ 2 1	$-\sqrt{\frac{(a+1)(p+2-a)(b-1)b(q+2-b)}{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(p+2-a)(a-q)(b-1)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$
$a-2$ $b-1$ 2 1	$\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q-1)b(p+3-b)}{(p+2)(p+3)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{a(a-q-1)(a-q)(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$

$a_1\ b_1\ a_2\ b_2$ \ $p'\ q'\ r'$	$p+1\quad q+2\quad 0$	$p\quad q+2\quad 1$
$a\quad b-1\quad 1\quad 0$	$-\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(a-q-1)(a-q)b(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(q+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+2-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b\quad 1\quad 0$	$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q-1)(p+2-b)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(q+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(a-q-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a\quad b-2\quad 2\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(a-q-1)(a-q)(b-1)b(p+3-b)}{(p+2)(q+1)(q+2)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q-1)(a-q)(b-1)(p+2-b)(p+3-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 2\quad 0$	$\dfrac{(2p+4-a-b)\sqrt{(a+1)(a-q-1)b(q+2-b)}}{\sqrt{2(p+2)(q+1)(q+2)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$	$-\dfrac{(a+b)\sqrt{(p+1-a)(a-q-1)(p+2-b)(q+2-b)}}{\sqrt{2(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2\quad b\quad 2\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{a(a+1)(p+2-a)(p+2-b)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(q+2)(q+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$	$-\sqrt{\dfrac{a(p+1-a)(p+2-a)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 1\quad 1$	$-\sqrt{\dfrac{3(a+1)(a-q-1)b(q+2-b)}{2(p+2)(q+1)(q+2)(p+1-q)}}$	$-\sqrt{\dfrac{3(p+1-a)(a-q-1)(p+2-b)(q+2-b)}{2(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)}}$
$a-1\quad b-2\quad 2\quad 1$	$\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q-1)(b-1)b(p+3-b)}{(p+2)(q+1)(q+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(a-q-1)(b-1)(p+2-b)(p+3-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-2\quad b-1\quad 2\quad 1$	$\sqrt{\dfrac{a(a+1)(p+2-a)b(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(q+2)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\dfrac{a(p+1-a)(p+2-a)(p+2-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(a+1-b)}}$

p' q' r' / a_1 b_1 a_2 b_2	$p+1$ q 2	p $q+1$ 2
a $b-1$ 1 0	$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(b-1)(q+1-b)}{(p+2)q(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q)(b-1)(p+2-b)}{(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-1$ b 1 0	$-\sqrt{\frac{a(a-q)(b-1)b(p+2-b)}{(p+2)q(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{a(p+1-a)(b-1)b(q+1-b)}{(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$
a $b-2$ 2 0	$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(p+3-b)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)q(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q)(p+2-b)(p+3-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1$ $b-1$ 2 0	$\frac{(2p+4-a-b)\sqrt{a(a-q)(b-1)(q+1-b)}}{\sqrt{2(p+2)q(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$	$\frac{-(2q+2-a-b)\sqrt{a(p+1-a)(b-1)(p+2-b)}}{\sqrt{2(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2$ b 2 0	$\sqrt{\frac{(p+2-a)(a-q-1)(a-q)b(b-1)(p+2-b)}{(p+2)q(q+1)(p+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(a-q-1)(b-1)b(q+1-b)}{(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)(a-b)}}$
$a-1$ $b-1$ 1 1	$\sqrt{\frac{3a(a-q)(b-1)(q+1-b)}{2(p+2)q(q+1)(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{3a(p+1-a)(b-1)(p+2-b)}{2(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)}}$
$a-1$ $b-2$ 2 1	$\sqrt{\frac{a(a-q)(p+3-b)(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)q(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$\sqrt{\frac{a(p+1-a)(p+2-b)(p+3-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$
$a-2$ $b-1$ 2 1	$-\sqrt{\frac{(a-q-1)(a-q)(b-1)(p+2-b)(q+1-b)}{(p+2)q(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$	$-\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(a-q-1)(b-1)(p+2-b)}{(p+1)(p+2)(q+1)(p+1-q)(a+1-b)}}$

$p'\ q'\ r'$ $a_1\ b_1\ a_2\ b_2$	$p+1\quad q+1\quad 1_1$	$p+1\quad q+1\quad 1_2$
$a\quad b-1\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{3(a+1)(p+1-a)(a-q)}{2c_0(a+1-b)}}$	$\dfrac{\{q(p+2-q)(p-2q-3)-2c_0(q+1-b)\}\sqrt{(a+1)(p+1-a)(a-q)}}{\sqrt{2c_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{3b(p+2-b)(q+1-b)}{2c_0(a+1-b)}}$	$\dfrac{\{q(p+2-q)(p-2q-3)+2c_0(a-q)\}\sqrt{b(p+2-b)(q+1-b)}}{\sqrt{2c_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$
$a\quad b-2\quad 2\quad 0$	0	$\sqrt{\dfrac{2c_0(a+1)(p+1-a)(a-q)(b-1)(p+3-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 2\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{3(a+2-b)(a-b)}{4c_0}}$	$\dfrac{\{q(p+2-q)(p-2q-3)(a+2-b)(a-b)+2c_0q(p+3-a-b)(a+b)-2c_0(2p+4-2q-a-b)a(b-1)\}}{\sqrt{4c_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2\quad b\quad 2\quad 0$	0	$-\sqrt{\dfrac{2c_0a(p+2-a)(a-q-1)b(p+2-b)(q+1-b)}{(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)(a-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 1\quad 1$	$-\dfrac{[2(p+q+3)-3(a+b)]}{\sqrt{4c_0}}$	$\dfrac{\{q(p+2-q)(p+3)(q+2)+q(p+2-q)(p-2q-3)(a+b-q)-2c_0(a-q)(q+1-b)\}\sqrt{3}}{\sqrt{4c_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)}}$
$a-1\quad b-2\quad 2\quad 1$	$\sqrt{\dfrac{3(b-1)(p+3-b)(q+2-b)}{2c_0(a+1-b)}}$	$\dfrac{\{q(p+2-q)(p-2q-3)+2c_0(a-q)\}\sqrt{(b-1)(p+3-b)(q+2-b)}}{\sqrt{2c_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$
$a-2\quad b-1\quad 2\quad 1$	$-\sqrt{\dfrac{3a(p+2-a)(a-q-1)}{2c_0(a+1-b)}}$	$-\dfrac{\{q(p+2-q)(p-2q-3)-2c_0(q+1-b)\}\sqrt{a(p+2-a)(a-q-1)}}{\sqrt{2c_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(a+1-b)}}$

其中 $c_0=p(p+3)-(p-q)q$

(l) SU_3 群的 Racah 系数

$\langle[\Gamma(100, 100)\Gamma'']\tilde{\Gamma}|[(\Gamma, 100)\Gamma', 100]\tilde{\Gamma}\rangle$

$\tilde{\Gamma} = p+2 \quad q \quad 0$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q \quad 0$
2 0 0	1

$\tilde{\Gamma} = p \quad q+2 \quad 0$

Γ'' \ Γ'	$p \quad q+1 \quad 0$
2 0 0	1

$\tilde{\Gamma} = p \quad q \quad 2$

Γ'' \ Γ'	$p \quad q \quad 1$
2 0 0	1

$\tilde{\Gamma} = p+1 \quad q+1 \quad 0$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q \quad 0$	$p \quad q+1 \quad 0$
2 0 0	$\sqrt{\frac{p-q}{2(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{p+2-q}{2(p+1-q)}}$
1 1 0	$\sqrt{\frac{p+2-q}{2(p+1-q)}}$	$-\sqrt{\frac{p-q}{2(p+1-q)}}$

$\tilde{\Gamma} = p+1 \quad q \quad 1$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q \quad 0$	$p \quad q \quad 1$
2 0 0	$\sqrt{\frac{p+1}{2(p+2)}}$	$\sqrt{\frac{p+3}{2(p+2)}}$
1 1 0	$\sqrt{\frac{p+3}{2(p+2)}}$	$-\sqrt{\frac{p+1}{2(p+2)}}$

$\tilde{\Gamma} = p \quad q+1 \quad 1$

Γ'' \ Γ'	$p \quad q+1 \quad 0$	$p \quad q \quad 1$
2 0 0	$\sqrt{\frac{q}{2(q+1)}}$	$\sqrt{\frac{q+2}{2(q+1)}}$
1 1 0	$\sqrt{\frac{q+2}{2(q+1)}}$	$-\sqrt{\frac{q}{2(q+1)}}$

(f) SU_3 群的 Racah 系数

$\langle[\Gamma_1(110, 100)\Gamma'']\tilde{\Gamma}|[(\Gamma, 110)\Gamma', 100]\tilde{\Gamma}\rangle$

$\tilde{\Gamma} = p+2 \quad q+1 \quad 0$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q+1 \quad 0$
2 1 0	1

$\tilde{\Gamma} = p+2 \quad q \quad 1$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q \quad 1$
2 1 0	1

$\tilde{\Gamma} = p+1 \quad q+2 \quad 0$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q+1 \quad 0$
2 1 0	1

$\tilde{\Gamma} = p \quad q+2 \quad 1$

Γ'' \ Γ'	$p \quad q+1 \quad 1$
2 1 0	1

$\tilde{\Gamma} = p+1 \quad q \quad 2$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q \quad 1$
2 1 0	1

$\tilde{\Gamma} = p \quad q+1 \quad 2$

Γ'' \ Γ'	$p \quad q+1 \quad 1$
2 1 0	1

$\tilde{\Gamma} = p+1 \quad q+1 \quad 1$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q+1 \quad 0$	$p+1 \quad q \quad 1$	$p \quad q+1 \quad 1$
1 1 1	$\sqrt{\frac{(p+3)(q+2)}{3(p+2)(q+1)}}$	$-\sqrt{\frac{q(p+2-q)}{3(q+1)(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{(p+1)(p-q)}{3(p+2)(p+1-q)}}$
2 1 0_1	$\frac{(p+q)\sqrt{(p+3)(q+2)}}{\sqrt{6c_0(p+2)(q+1)}}$	$\frac{-(p-2q-3)\sqrt{q(p+2-q)}}{\sqrt{6c_0(q+1)(p+1-q)}}$	$\frac{-(2p+6-q)\sqrt{(p+1)(p-q)}}{\sqrt{6c_0(p+2)(p+1-q)}}$
2 1 0_2	$\sqrt{\frac{(p+1)q(p-q)(p+2-q)}{2c_0(p+2)(q+1)}}$	$\sqrt{\frac{(p+1)(p+3)(q+2)\cdot(p-q)}{\sqrt{2c_0(q+1)(p+1-q)}}}$	$\sqrt{\frac{(p+3)q(q+2)\cdot(p+2-q)}{\sqrt{2c_0(p+2)(p+1-q)}}}$

$c_0 = p(p+3) - (p-q)q$

参　考　文　献

[1] G. Racah, Group Theory and Spectroscopy, Princeton, (1951).
[2] R. E. Behrends et al., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 1.
[3] A. Salam, Theoretical Physics, p. 173, Viena, (1963).
[4] J. P. Elliott et al., *Proc. Roy. Soc.*, **A277** (1963), 557.
[5] A. Arima et al., *Nucl. Phys.*, **A138** (1969), 273., **A162** (1971), 605.
[6] K. T. Hecht, *Nucl. Phys.*, **63** (1965), 177.
[7] G. Gneuss et al., *Nucl. Phys.*, **A171** (1971), 449.
[8] B. H. Flowers et al., *Proc. Phys. Soc.*, **84** (1964), 139.
[9] A. R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Priceton, (1957).
[10] 孙洪洲等，物理学报 **21**(1965)，56.
[11] 杨国桢等，北京大学学报(自然科学版) **10**(1964)，269.
[12] S. McDonald et al., *J. Math. Phys.*, **14** (1973), 1248.
[13] J. P. Draayer et al., *J. Math. Phys.*, **14** (1973), 1904.
[14] E. M. Haacke et al., *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 2040.
[15] 侯伯宇，中国科学，**14**(1965)，367.
[16] J. J. De Swart, *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 916.
[17] L. C. Biedenharn et al., *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 1449., **4** (1964), 1723., **4** (1964), 1730.
[18] 陈金全等，高能物理与核物理，**3**(1979)，216.

ON THE IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF THE COMPACT SIMPLE LIE GROUPS OF RANK 2 (I)

SUN HUNG-ZHOU
(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, we analyse the commutation relations of the infinitesimal operators of the group SU_3 and find that the eight infinitesimal operators of the group SU_3 can be written as a scalar operator A, three angular momentum operators (L_1, L_0, L_{-1},) and two sets of the irreducible tensor operators of rank ½, $(T_{\pm\frac{1}{2}},\ V_{\pm\frac{1}{2}})$. By means of the commutation relations of these operators, all irreducible representations of the group SU_3 can be easily obtained.

In this paper, the matrices corresponding to these operators in the irreducible representation $(\lambda\,\mu)$, are given; therefore the irreducible representation and its representation space $R^{(\lambda\mu)}$ are completely defined. Besides, a method for calculating the scalar factors of the reduction coefficients and the symmetric relations of those factors are also given. As examples, the scalar factors of the reduction coefficients of $(\lambda\mu)\otimes(10)$, $(\lambda\mu)\otimes(01)$, $(\lambda\mu)\otimes(20)$ and $(\lambda\mu)\otimes(11)$ are calculated.

In the last part of this paper, we define the irreducible tensor operators of the group SU_3 and prove the corresponding Wigner-Eckart theory.

The method used in the discussion of the group SU_3 may be extended to all of the compact simple Lie groups of rank 2 and we shall discuss them in two succeeding papers.