第3卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 6
1979年11月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1979

# 非线性超场和夸克禁闭

李新洲 顾鸣皋 殷鹏程
(复旦大学物理系)

**摘　　要**

利用非线性超场技术，我们讨论了超对称的非线性场论模型. 找到了超对称运动方程精确静态解的一般形式，它可以作为袋模型的出发点. 作为一个特殊情形，我们重新得到了 SLAC 袋模型，也就是说，SLAC 袋是超对称的. 文中还讨论了超对称的 Sine-Gordon 模型、Sinh 模型和 exp 模型.

## 一、引　　言

基本粒子具有内部结构这一概念已为人们普遍接受，自然希望在量子场论的基础上寻找一种具有空间展延性和内部结构的解. 近几年来，这方面的进展之一就是用所谓非微扰论的方法对非线性的量子场方程求解，这包括将定域的量子场方程化为它的经典近似方程，然而对这个经典方程求"孤子"(Soliton) 解.

目前，物理工作者普遍认为强子是由夸克或层子组成的，为了能够动力学地说明强子的性质，而又不必要求一定有自由夸克存在，MIT 的一些物理工作者首先提出了口袋模型[1]. 在这基础上先后又提出了 SLAC 袋模型[2]、CERN袋模型[3] 等关于夸克禁闭的强子模型. SLAC 袋模型的主要特点是适当选择拉氏函数，自动导致对夸克的禁闭，而不必象 MIT 袋模型那样把夸克禁闭作为基本假设.

另一方面，J. Wess 和 B. Zumino[4] 引进了在费米场和玻色场之间的对称性，即超对称性. 普通的场方程都能用超场的技术推广到超对称的形式，J. Hruby 已经讨论了超对称 Sine-Gordon 方程，并获得了它的静态解. 这些结果，可以作为本文的一个特例[5]. 本文利用非线性超场方法导出了超对称的非线性拉格朗日量，由此可得到超对称场方程的一般形式

$$
\begin{cases}
[i\hat{\partial} - i\,U'(\varphi)] - \psi = 0, & (1.1)\\
\Box\,\varphi - \dfrac{1}{4}\,U(\varphi)\,U'(\varphi) + \dfrac{i}{2}\,\bar{\psi}\psi\,U''(\varphi) = 0. & (1.2)
\end{cases}
$$

如果下述方程

本文1978年8月27日收到.

$$\Box\,\varphi-\frac{1}{4}U(\varphi)\,U'(\varphi)=0 \tag{1.3}$$

具有孤子解 $\varphi_s(x)$，那么我们可以将 $\varphi_s(x)$ 作为势输入到方程 (1.1)，并得到方程组的精确解 $\psi(x)$. 这可以作为 1+1 维袋模型的出发点. 这些工作也可以看作是对文献 [5] 的推广.

我们导出了方程组(1.1),(1.2)的一般解法. 如果适当地选择势函数 $U(\varphi)$，利用超对称的拉格朗日量一般表式,我们能自动导出 SLAC 袋模型. 这样就证明了 SLAC 袋模型是超对称的,这是本文的结果之一. 同时,文中还讨论了超对称 Sine-Gordon 模型、超对称 exp 模型和超对称 Sinh 模型.

本文中使用的超场符号为[6]

$$S(x_\alpha,\theta_a)=\varphi(x)+i\bar{\theta}\,\psi(x)+\frac{1}{2}\,i\bar{\theta}\theta\,F(x), \tag{1.4}$$

$$D_a=\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_a}-i(\gamma_\alpha\theta)_a\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \tag{1.5}$$

其中 $x$ 为时空变量，$\theta$ 为反交换的 majorana 旋量，其中 $\alpha=1,2$; $a=1,2$. 而无质量超对称场的拉格朗日量是下式的 $i\bar{\theta}\theta$ 项系数

$$\frac{1}{2}\,iS(x,\theta)\,\bar{D}DS(x,\theta)=i\bar{\theta}\theta\left(\frac{1}{2}\,\varphi\,\Box\,\varphi+\frac{1}{2}\,F^2-\frac{i}{2}\bar{\psi}\hat{\partial}\psi\right)+\cdots. \tag{1.6}$$

## 二、场方程及其求解公式

在本节中我们将导出超对称的非线性方程的一般形式，并导出寻找这些方程的精确定态解的方法. 在推导这些一般结果之前,我们先证明两条定理.

**定理 1**: 标量超场定义为 $S(x,\theta)=\varphi(x)+i\bar{\theta}\,\psi(x)+\frac{1}{2}\,i\bar{\theta}\theta\,F(x)$，其中 $\{\varphi(x),\psi(x),F(x)\}$ 为超多重态，$\psi(x)$ 为 majorana 旋量场，$\varphi(x)$ 和 $F(x)$ 为玻色场,那么

$$S^n(x,\theta)=\varphi^n+ni\,\bar{\theta}\psi\varphi^{n-1}+\frac{ni}{2}\bar{\theta}\theta\,F\cdot\varphi^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2}\bar{\theta}\theta\,\bar{\psi}\psi\,\varphi^{n-2}. \tag{2.1}$$

证明：利用 $\theta$, $\bar{\theta}$ 的反交换性质和 $\bar{\theta}\psi=\bar{\psi}\theta$，以及归纳法,可得

$$\begin{aligned}S^n(x,\theta)=S^{n-1}(x,\theta)\,S(x,\theta), &=\varphi^n+(n-1)\,i\bar{\theta}\,\bar{\psi}\psi^{n-1}+\frac{n-1}{2}\,i\,\bar{\theta}\theta\,F\,\varphi^{n-1}\\ &-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,\bar{\theta}\theta\bar{\psi}\psi\varphi^{n-2}+i\,\bar{\theta}\psi\,\varphi^{n-1}\\ &-(n-1)\cdot\bar{\theta}\theta\,\bar{\psi}\psi\,\varphi^{n-2}+\frac{1}{2}\,i\,\bar{\theta}\theta\,F\varphi^{n-1}\\ &=\varphi^n+ni\,\bar{\theta}\psi\,\varphi^{n-1}+\frac{n}{2}\,i\,\bar{\theta}\theta\,F\varphi^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\bar{\theta}\theta\,\bar{\psi}\psi\cdot\varphi^{n-2}.\end{aligned}$$

**定理2**: 非线性拉格朗日量

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varphi\Box\varphi - \frac{1}{2}i\psi\hat{\partial}\psi - \frac{1}{8}U^2(\varphi) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\psi U'(\varphi) \tag{2.2}$$

是超对称的.

证明：非线性超对称拉格朗日量，应是下式的 $i\bar{\theta}\theta$ 项

$$\frac{1}{2}iS(x,\theta)\bar{D}DS(x,\theta) + V(S(x,\theta)), \tag{2.3}$$

将 $V(S(x,\theta))$ 利用 Maclaurin 级数展开，并将(2.1)代入(2.3)，并取其 $\bar{\theta}\theta$ 项，可得

$$\begin{aligned}
&[V(S(x,\theta))]_{\bar{\theta}\theta\text{项}}\\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^n(x,\theta)V^{(n)}(0)}{n!}\right]_{\bar{\theta}\theta\text{项}}\\
&= \sum\left[\frac{n}{2}iF\varphi^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}\bar{\psi}\psi\varphi^{n-2}\right]\bar{\theta}\theta\cdot V^{(n)}(0)/n!\\
&= \frac{i\bar{\theta}\theta}{2}\sum\left[\frac{F\cdot\varphi^{n-1}V^{(n)}(0)}{(n-1)!} + \frac{i\bar{\psi}\psi\varphi^{n-2}V^{(n)}(0)}{(n-2)!}\right]\\
&= \frac{i\bar{\theta}\theta}{2}[F\cdot V'(\varphi) + i\bar{\psi}\psi V''(\varphi)].
\end{aligned}$$

至此证明了非线性超对称拉格朗日量形式为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varphi\Box\varphi + \frac{1}{2}F^2 - \frac{1}{2}i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi + \frac{1}{2}F\cdot V'(\varphi) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\psi V''(\varphi). \tag{2.4}$$

由于拉格朗日量中不含有 $F$ 的动能项，我们能用 $F$ 的运动方程，把 $F$ 消去

$$F + \frac{V'(\varphi)}{2} = 0, \tag{2.5}$$

代入拉氏量(2.4)，得到

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varphi\Box\varphi - \frac{1}{2}i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - \frac{1}{8}[V'(\varphi)]^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\psi V''(\varphi). \tag{2.6}$$

如令 $U(\varphi) = V'(\varphi)$，即获(2.2)式，定理 2 获证.

利用超对称拉格朗日量(2.2)，可得到欧拉-拉格朗日运动方程

$$\left\{\begin{aligned}
&[i\hat{\partial} - iU'(\varphi)]\psi = 0, && (2.7)\\
&\Box\varphi - \frac{1}{4}U(\varphi)U'(\varphi) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\psi U''(\varphi) = 0. && (2.8)
\end{aligned}\right.$$

假设旋量场 $\psi$ 不存在，即 $\psi = 0$，(2.8)变为

$$\Box\varphi - \frac{1}{4}U(\varphi)U'(\varphi) = 0. \tag{2.9}$$

设(2.9)具有定态解 $\varphi = \varphi_s(x)$，我们把它作为(2.7)的势，去找 $\psi$ 的静态解，即

$$[i\hat{\partial} - iU'(\varphi_s(x))]\psi = 0. \tag{2.10}$$

为找静态解，化简(2.10)为

$$i\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\psi}_1\\ \dot{\psi}_2\end{pmatrix} = iU'(\varphi_s(x))\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

其中 $\partial_1\psi = \dot{\psi}$. (2.11) 的解为

$$\psi(x)=Ce^{\pm i\int U'(\varphi_s(x))dx}\begin{pmatrix}1\\ \mp i\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

其中$C$是规一化常数，$\psi(x)$ 应满足 $\int|\psi|^2<\infty$ 的限制．将解(2.12)代入(2.8)显然满足，所以

$$\begin{cases}\varphi(x)=\varphi_s(x)\\ \psi(x)=C\ e^{\pm i\int U'(\varphi_s(x))dx}\begin{pmatrix}1\\ \mp i\end{pmatrix}\end{cases} \tag{2.13}$$

是方程组(2.7)(2.8)的精确解．

## 三、SLAC 袋 模 型

利用上节导出的超对称性拉格朗日量(2.2)，选取$U(\varphi)=2\sqrt{-2\lambda}\ (\varphi^2-f^2)$，能自动导出 SLAC 袋模型．这说明 SLAC 袋模型不仅是 Poincaré 不变的[7]，而且具有超对称性，下面我们具体来讨论这个模型．这时，拉格朗日量为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\varphi\Box\varphi-\frac{1}{2}i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi+\lambda(\varphi^2-f^2)^2-2\sqrt{2\lambda}\ \bar{\psi}\psi\ \varphi. \tag{3.1}$$

标量场$\varphi$的经典势 $\lambda(\varphi^2-f^2)^2$ 具有对称性，而它的极小值是 $\varphi=\pm f$，所以我们期望在对应的量子理论中，理论应是自发破缺的．假设$\varphi$场的真空期待值 $|\langle\varphi\rangle|=f$，为方便起见我们已选择 $+f$．通过微扰计算，我们能得到费米子质量 $M_Q=4\sqrt{2\lambda}\ f$，标量介子质量 $M_\varphi=(8\lambda f^2)^{\frac{1}{2}}$．

从拉格朗日量(3.1)得到的运动方程是

$$\begin{cases}[i\hat{\partial}-4\sqrt{2\lambda}\ \varphi]\ \psi=0, & (3.2)\\ \Box\ \varphi-4\lambda\ \varphi(\varphi^2-f^2)=2\sqrt{2\lambda}\ \bar{\psi}\psi. & (3.3)\end{cases}$$

它的静态解是

$$\varphi_s(x)=f\tanh\sqrt{2\lambda}\ f(x-x_0), \tag{3.4}$$

$$\psi(x)=\frac{N}{\sqrt{2}}\ [\cosh\sqrt{2\lambda}\ f(x-x_0)]^{-4}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

其中$N$是归一化常数，满足 $\int dx\ \psi^+\psi=1$，从这些解中我们发现

$$E_{\text{total}}=\frac{4}{3}(2\lambda)^{\frac{1}{2}}f^3, \tag{3.6}$$

$$\bar{\psi}\psi=0. \tag{3.7}$$

强耦合极限可定义为

$$\lambda\to\infty,\quad f\to 0,\quad \lambda^{\frac{1}{6}}f=\text{固定值}. \tag{3.8}$$

由于 $\bar{\psi}\psi=0$，$\varphi$场方程事实上不依赖于 $\psi$．$\varphi$场的动力学是决定于它的自耦合，在条件(3.8)下，$M_Q\gg E_{\text{total}}$，也就是说，夸克被禁闭了．

## 四、其他非线性模型

适当选择不同的 $U(x)$，可以得到各种超对称的非线性模型．本节以超对称 Sine-Gordon 模型、超对称 Sinh 模型和超对称 exp 模型为例进行讨论．

### 1. 超对称 Sine-Gordon 模型

超对称 Sine-Gordon 方程，已由 J. Hurby 进行了讨论，但是在本文的一般形式中，我们只要进行适当选择，可以将它作为一个特例．

将 $U(\varphi)=\frac{4\sqrt{-\alpha}}{\beta}\sin\frac{\beta\varphi}{2}$ 代入(2.2)式，可得到超对称 Sine-Gordon 模型的拉格朗日量

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\varphi\Box\varphi-\frac{1}{2}i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi+\frac{2\alpha}{\beta^2}\sin^2\frac{\beta\varphi}{2}-\sqrt{\alpha}\,\bar{\psi}\psi\cos\frac{\beta\varphi}{2}. \tag{4.1}$$

从(4.1)可得到费米场 $\psi$ 和玻色场 $\varphi$ 相互耦合的运动方程

$$\left(i\hat{\partial}+2\sqrt{\alpha}\cos\frac{\beta\varphi}{2}\right)\psi=0, \tag{4.2}$$

$$\Box\varphi+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\varphi+\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\sin\frac{\beta\varphi}{2}=0. \tag{4.3}$$

利用求解的一般公式(2.13)，上述方程有静态解

$$\varphi_s(x)=\frac{4}{\beta}\ \mathrm{tg}^{-1}\exp\sqrt{\alpha}\ x, \tag{4.4}$$

$$\psi(x)=\frac{N}{\sqrt{2}}\ (\cosh\sqrt{\alpha}\,x)^{-2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

这组解显然能成为夸克禁闭模型的出发点．

### 2. 超对称 Sinh 模型

将 $U(\varphi)=4\sqrt{\beta}\cosh\frac{\alpha\varphi}{2}$ 代入(2.2)式，可得到超对称 Sinh 模型的拉格朗日量

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\varphi\Box\varphi-\frac{1}{2}\ i\,\bar{\psi}\hat{\partial}\psi-\alpha\beta\cosh^2\frac{\alpha\varphi}{2}+i\alpha\sqrt{\beta}\ \bar{\psi}\psi\ \sinh\frac{\alpha\varphi}{2}. \tag{4.6}$$

从这个拉格朗日量，可以得到运动方程

$$\left(i\hat{\partial}-2i\alpha\sqrt{\beta}\sinh\frac{\alpha\varphi}{2}\right)\psi=0, \tag{4.7}$$

$$\Box\varphi-\alpha\beta\sinh\alpha\varphi+\frac{i}{2}\alpha^2\sqrt{\beta}\ \bar{\psi}\psi\cosh\frac{\alpha\varphi}{2}=0. \tag{4.8}$$

方程(4.7)(4.8)的定态解为

$$\varphi_s=\frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}\left[\varepsilon\, cn^2\frac{\mu}{k}\ x+sn^2\frac{\mu}{k}x\right], \tag{4.9}$$

$$\psi=Ce^{\pm i\frac{2\alpha}{\mu}\sqrt{\frac{(\varepsilon-1)\beta}{2}}}\ \cos^{-1}\left(dn\frac{\mu}{k}x\right). \tag{4.10}$$

其中 $\mu=\alpha\sqrt{\beta}$, $k^2=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$, $snx$, $cnx$ 和 $dnx$ 是 Jacobi 椭圆函数，在计算过程中我们利用了如下两式

$$sn^2x+cn^2x=1,$$

$$\sinh\frac{1}{2}\left(\cosh^{-1}\left[\varepsilon cn^2\frac{\mu}{k}x+sn^2\frac{\mu}{k}x\right]\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{2}}\,cn\frac{\mu}{k}x,$$

关于椭圆函数理论可参见王竹溪的专著[8].

**3. 超对称 exp 模型**

将 $U(\varphi)=4\sqrt{\frac{-\beta}{2}}\exp\left[\frac{\alpha\varphi}{2}\right]$ 代入(2.2)式，得到超对称 exp 模型的拉格朗日量

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\varphi\Box\varphi-\frac{1}{2}i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi+\beta\exp[\alpha\varphi]-\bar{\psi}\bar{\psi}\alpha\sqrt{\frac{\beta}{2}}\exp\left[\frac{\alpha\varphi}{2}\right]. \tag{4.11}$$

相互耦合的运动方程为

$$\left(i\hat{\partial}+\alpha\sqrt{2\beta}\exp\left[\frac{\alpha\varphi}{2}\right]\right)\psi=0, \tag{4.12}$$

$$\Box\varphi+\alpha\beta\exp[\alpha\varphi]-\alpha^2\sqrt{\frac{\beta}{2}}\,\bar{\psi}\psi\exp\left[\frac{\alpha\varphi}{2}\right]=0. \tag{4.13}$$

为了找出方程(4.7)(4.8)的静态解，我们先求下述方程的静态解

$$\Box\varphi+\alpha\beta\exp[\alpha\varphi]=0. \tag{4.14}$$

方程(4.14)的首次积分是

$$(\dot{\varphi})^2=\alpha\beta\exp[\alpha\varphi]+a. \tag{4.15}$$

当 $a=4b^2$, $\varepsilon=\frac{a}{2\beta}$ 时

$$\varphi_s(x)=\frac{1}{\alpha}\ln\varepsilon\operatorname{cosech}^2\alpha cx, \tag{4.16}$$

将(4.16)代入(4.12)并用公式(2.12)得到运动方程的静态解为

$$\begin{cases}\varphi_s(x)=\dfrac{1}{\alpha}\ln\varepsilon\operatorname{cosech}^2\alpha cx,\\ \psi(x)=C\left[\tanh\dfrac{\alpha bx}{2}\right]^{\pm2}.\end{cases} \tag{4.17}$$

上面我们讨论了三种不同的超对称非线性方程. 事实上，我们还可选择不同的 $U(\varphi)$，引入各种函数相互作用进行讨论. 比如选择较复杂的函数

$$U(\varphi)=\sqrt{\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2+\frac{\lambda}{2}\varphi^n},$$

即引入了超对称 $\varphi^n$ 模型，解方程时能获得标量场的孤子解 $\varphi_s(x)=[2\gamma^2\operatorname{sech}^2\mu(x-x_0)]^{1/(n-2)}$ $\left(\text{其中 }\gamma=\sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}\right)$ 这也为夸克禁闭模型提供了一个可能途径.

另一方面，在解超对称 sinh 方程时，出现了 Jacobi 椭圆函数，事实上 Sine-Gordon 方

程的一般解也是椭圆函数，我们可以作类似的讨论.

对复旦大学近代物理讨论班老师们对本文作的有益讨论表示感谢.

## 参考文献


[1] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, S. B. Thorn and V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.*, **D9**(1974), 3471; M. Greutz, *Phys. Rev.*, **D7**(1974), 1749.

[2] W. Bardeen, M. S. Chanowitz, S. D. Drell, M. Weinstein and T. M. Yan, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 1094.

[3] N. S. Craigie and G. Preparata, *Nucl. Phys.*, **B102**(1976), 478; K. Szegö, *Nucl. Phys.*, **B120** (1977), 156.

[4] J. Wess and B. Zumino, *Nucl. Phys.*, **B70**(1974), 39.

[5] A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 1521; E. Witten, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 2991; J. Hruby, *Nucl. Phys.*, **B131**(1977), 275.

[6] S. Ferrara, *Nuovo. Cim. Lett.*, **13**(1975), 629.

[7] R. C. Giles, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 1670.

[8] 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，科学出版社，(1965)，589.


# NONLINEAR SUPERFIELDS AND QUARK CONFINEMENT

LI XIN-ZHOU GU MING-GAO YIN PENG-CHENG

(*Fudan University*)

ABSTRACT

A supersymmetric form of the two-dimensional nonlinear model is described. We discover that exact stationary solutions of the coupled equations of motion can be used as the starting point of the bag model. As a special case, we obtain again "SLAC Bag" model. The supersymmetric Sine-Gordon model, hyperbolic sine model, and exponential model are discussed.