第 3 卷 第 6 期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 6
1979 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1979

闵空间拓扑非平庸球对称场中零能费米子

侯伯宇 侯伯元
(西北大学) (内蒙古大学)

摘 要

本文讨论了 $U(1)$ 点磁荷场中零能费米子解的个数及其物理性质，特别是轴矢流部分守恒的反常源为磁荷，及电荷的有效分布集中在磁荷点的现象. 本文又采用同步规范局部坐标系明显地将任意同位旋自旋$\frac{1}{2}$粒子在球对称 $SU(2)$ 无源场中的方程分离变量. 证明了零能解仅有 $J=0$, $|q|=\frac{1}{2}$; $J=\frac{1}{2}$, $|q|=1$, 0 的情况,并且明显地求出了同位旋 I 为任意半整数及 1 时的解.

规范场中零本征值费米子解与 Adler 反常、CP 破缺,瞬子及其微扰解数,真空隧道效应以及费米子数 1/2 等问题有关[1,2],近来受到了注意. 此种解的存在条件涉及非平庸的拓扑性质,故一般底空间需是可紧致化的欧空间,而欧空间中零本征值费米子的物理解释要联系到闵空间的虚时间隧道效应.

本文讨论闵空间拓扑非平庸球对称场中零能费米子.第一节讨论 $U(1)$ 点磁荷场中带电费米子.阐明了四维闵空间的解数如何取决于角向方程,以及球面上的场、方程、波函数分别与二维欧空间对应式的关系.分析了零能解的物理量:特别是轴矢流部分守恒而在原点(磁场的源)破缺,及电荷的有效分布集中在原点等有意思现象.第二节中讨论 $SU(2)$ 无源球对称场中的费米子,运用球对称同步规范标架将此背景场中任意同位旋的自旋1/2 费米子的方程分离变量,利用背景场的边界行为证明了仅有 $J=0$, $|q|=\frac{1}{2}$; 及 $J=\frac{1}{2}$, $|q|=1$, 0 的零能解. 并且明显地求出了同位旋 I 为半整数及 1 时的解.

一、在点磁单极附近的零能费米子

设在强度为 g/e 的点磁单极的磁场中,有一电荷为 νe, 质量为M的 Dirac 粒子, e 为电子的电荷值, ν, g 为量子化的整数(半整数). 则它的定态波函数满足下方程:

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + M\psi = \gamma_4 E\psi, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\nabla}$ 是规范协变微商

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\partial} - i\nu e\boldsymbol{A}. \tag{2}$$

本文 1978 年 8 月 1 日收到.

而规范势 $\boldsymbol{A}=A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$:

$$A_\varphi=\frac{g}{e}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta},\quad (\text{在北区}) \qquad (3)$$
$$A_\varphi=\frac{g}{e}\frac{-1-\cos\theta}{r\sin\theta},\quad (\text{在南区})$$

这时存在守恒的总角动量

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{P}-\nu e\boldsymbol{A})-q\frac{\boldsymbol{r}}{r}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}. \qquad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为 Dirac 矩阵，$q=g\nu$ 取量子化整数或半整数值，$-q\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 项代表电磁场内禀角动量。

以下求 $E=0$ 的解，为此选 $\gamma_4\gamma_5$ 为对角的表象:

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\quad \gamma_4=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_4\gamma_5=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$、0、i、1 等均代表 2×2 矩阵. 并将波函数 ψ 表为

$$\psi=\begin{pmatrix}\chi^+\\ \chi^-\end{pmatrix}, \qquad (6)$$

其中 $\chi^\pm$ 都是两分量的.

为分离变量采用推广的两分量 K 算子:

$$K\equiv -i\varepsilon_{ijK}\sigma_l x_j\nabla_K+1, \qquad (7)$$

即将通常 K 算子中的普通微商 ∂_K 改为规范协变微商 ∇_K.

再利用易证的

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}=\sigma_r\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\sigma_r K, \qquad (8)$$

其中

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}. \qquad (9)$$

(8)式代入(1)式后得(当 $E=0$ 时):

$$\left[\sigma_r\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\sigma_r K\mp M\right]K^\pm=0. \qquad (10)$$

解(10)式最方便是用 J^2, J_Z, 与 σ_r 的共同本征态为基展开，即如下式选完备基:

$$\eta^j_{m,\mu}(\varphi,\theta,\gamma)=\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}D^j_{m,\mu-q}(\varphi,\theta,\gamma)s_\mu(\varphi,\theta,\gamma), \qquad (11)$$

其中

$$s_\mu(\varphi,\theta,\gamma)=\sum_{\mu'}S_{\mu'}D^{\frac{1}{2}}_{\mu',\mu}(\varphi,\theta,\gamma). \qquad (12)$$

而 $S_{\mu'}$ 为通常 σ_Z 的本征态，表为:

$$s_{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad s_{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

于是 s_μ 为 σ_r 的本征态，例如:

$$
\begin{aligned}
s_{\frac{1}{2}}(\varphi, \theta, -\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (\text{在北区}) \\
s_{\frac{1}{2}}(\varphi, \theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{在南区})
\end{aligned}
\tag{13}
$$

易见此组完备基(11)具有如下性质：

$$
\begin{aligned}
J^2\eta^j_{m,\mu} &= j(j+1)\eta^j_{m,\mu}, \\
J_Z\eta^j_{m,\mu} &= m\eta^j_{m,\mu}, \\
\sigma_r\eta^j_{m,\mu} &= 2\mu\eta^j_{m,\mu}, \\
K\eta^j_{m,\mu} &= K_q\eta^j_{m,-\mu},
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中

$$
K_q = \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - q^2}.
$$

令 $K^{\pm} = \sum\limits_{\mu} f^{\pm}_{\mu}(r)\eta^j_{m,\mu}$ 代入(9)并利用 $\eta^j_{m,\mu}$ 的正交完备性得径向函数 $f^{\pm}_{\mu}(r)$ 满足方程：

$$
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) f^{\pm}_{\mu}(r) - \frac{1}{r} K_q f^{\pm}_{-\mu}(r) \mp 2\mu M f^{\pm}_{\mu}(r) = 0. \tag{15}
$$

考查在∞的渐近行为，可见仅当有关各方程第一项与最后一项系数比均为正时始有相容的束缚态解．当$K_q \neq 0$时，$f_{\mu}(r)$ 与 $f_{-\mu}(r)$ 两函数有关而其方程组最后一项符号相反，可见无束缚态解．仅当 $K_q = 0 \left(\text{即 } j = |q| - \dfrac{1}{2}\text{，由(11)知还要求 } \mu = \dfrac{1}{2}\dfrac{q}{|q|}\right)$ 时，才可能有如下束缚态解：

$$
\begin{aligned}
&\text{当 } q > 0(\mu > 0) \text{ 时：} f^{+}(r) = 0, \quad f^{-}(r) = F(r). \\
&\text{当 } q < 0(\mu < 0) \text{ 时：} f^{-}(r) = 0, \quad f^{+}(r) = F(r).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中 $F(r)$ 满足：

$$
\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) F(r) + MF(r) = 0,
$$

解得

$$
F(r) = \frac{\sqrt{2M}}{r} e^{-Mr}. \tag{17}
$$

虽然 $F(r)$ 在原点奇异，但是

$$
\int_0^{\infty} F^2(r) r^2 dr = 1,
$$

即解可归一．

当 $K_q = 0$ 时基矢(11)为 J^2, J_Z, σ_r 以及 K 算子的共同本征态，其 j, μ 指标全由 q 值决定，可表为

$$\eta_m(\varphi,\theta,\gamma)=\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}D^j_{m,\mu-q}(\varphi,\theta,\gamma)s_\mu(\varphi,\theta,\gamma),$$

$$\left(j=|q|-\frac{1}{2},\quad \mu=\frac{1}{2}\frac{q}{|q|}\right), \tag{11a}$$

此式实质上与文献[3]所用 η_m 相同。

总之，在点磁单极附近，经典 Dirac 方程存在可归一零能解 $F(r)\eta_m(\varphi,\theta,\gamma)$，它是 $\gamma_4\gamma_5$ 与 σ_r 的本征态，本征值分别为 $-\frac{q}{|q|}$ 与 $\frac{q}{|q|}$，解是 $2j+1$ 维简并的 $(j\geqslant m\geqslant -j)$，即解数

$$n=2j+1=2|q|.$$

以 Dim ϕ^- (Dim ϕ^+) 表示 $\gamma_4\gamma_5$ 本征值为负(正)的本征态数，则上式可写为：

$$\text{第一陈类示性数}\equiv 2q=\mathrm{Dim}\ \phi^- - \mathrm{Dim}\ \phi^+ \tag{18}$$

此式与文献[4]所引 index 定理相似，但该文相应式中左方是二维欧空间涡线势的缠绕数，右方是二维"γ_5"取负正本征值的零能解数差。本文右方则指 $\gamma_4\gamma_5$ 本征值为负正的零能解数差。二者的联系是：因 $E=0$ 使 Dirac 方程(1)可分块对角，径向边界条件进一步要求仅当 $K_q=0$ 时有可归一解（于是波函数可同时为 σ_r 的本征态），且解必在径向微商前的 $\gamma_r=-\gamma_4\gamma_5\sigma_r$ 取正值的子空间内，亦即 $\gamma_4\gamma_5$ 的本征值符号与 σ_r 的本征值符号相反，于是问题化为角向方程 $K\phi=0$ 的解 η_m 中 σ_r 的本征值为正负的个数差，即磁量子数 m 的取值范围，有意思的是这里将解的个数与群表示的维数相联系。为清楚说明问题，如下列表对比：

在二维欧空间的量	在四维闵空间角向部分对应量
$i\gamma_\mu\nabla_\mu$（此处 $\mu=1,2$，求和）	$K=-i\varepsilon_{ijK}\sigma_i x_j\nabla_K+1$
$A_\mu(x)=\frac{2g}{e}\frac{1}{1+x^2}\varepsilon_{\lambda\mu}x_\mu$ (Vortex)	$A_r=A_\theta=0,\ A_\varphi=\frac{g}{e}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$
$E=0$	$K_q=0$
"γ_5" $=\sigma_z$ 本征态	σ_r 本征态
$u=c\begin{pmatrix}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\\0\end{pmatrix}$	$\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix}=s_{\frac{1}{2}}(\varphi,\theta,-\varphi)$
$u^{2j+1}=(e^{i\varphi}\sqrt{x^2})^{j+m}\begin{pmatrix}(1+x^2)^{-j-\frac{1}{2}}\\0\end{pmatrix}$	$\hat{u}^{2j+1}=D^j_{m,-q+\frac{1}{2}}(\varphi,\theta,-\varphi)s_{\frac{1}{2}}(\varphi,\theta,-\varphi)$

二者通过下列关系相联系：

$$i\gamma_\mu\nabla_\mu=UKU^{-1},$$

$$u=U\hat{u}.$$

其中 $U=\frac{2}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i\gamma_\mu x_\mu)=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\-\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$，即二者经

保形变换相连系．其中 $j = q - \frac{1}{2}$，即 $2j + 1 = 2q = 2\nu g > 0$，文献[4]相应于本文的 $\nu = 1, 2g = n > 0$ 的情况．当 $q < 0$ 时应得含 $S_{-\frac{1}{2}}$ 的解．

比较中微子理论由于 $M = 0$，波函数可按 γ_5 本征值分为两分量函数，它们是 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}$ 的本征态，无确定宇称以光速运动．现在 $E = 0$ 解可按 $\gamma_4\gamma_5$ 本征值分解为两分量函数，它们是 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{r}$ 的本征态，也无确定宇称，但为静态．

以下分析零能束缚态的荷流等物理量的分布(略去了共同因子 νe)，

$$J_K = i\bar{\psi}\gamma_K\psi = 0,$$

$$\rho = \psi^*\psi = \frac{2M}{r^2}e^{-2Mr}\eta^*\eta,$$

$$J_K^5 = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_K\psi = -\frac{i2M}{r^2}e^{-2Mr}\eta^*\sigma_K\eta,$$

$$J_4^5 = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\psi = 0,$$

$$J^5 = \bar{\psi}\gamma_5\psi = -\frac{q}{|q|}\frac{i2M}{r^2}e^{-2Mr}\eta^*\eta.$$

磁矩

$$\frac{1}{2M}\bar{\psi}\sigma\psi = 0.$$

电矩

$$P_K = -\frac{1}{2M}\bar{\psi}\gamma_4\gamma_K\psi = -\frac{q}{|q|}\frac{1}{r^2}e^{-2Mr}\eta^*\sigma_K\eta.$$

注意到 η 为 σ_r 的本征态，$\eta^*\sigma_K\eta$ 中仅径向非零 $\eta^*\sigma_r\eta = \frac{q}{|q|}\eta^*\eta$．所以 J^5 流仅径向部分非零，除原点外，此流是部分守恒的、"正常"的：

$$\partial_\mu J_\mu^5 = \partial_i J_i^5 = -2MJ^5, \tag{19}$$

仅在原点(磁场的散度非零处)存在反常．

由于 ψ 是 $\gamma_4\gamma_5$ 本征态，使

$$J^5 = -i\frac{q}{|q|}\rho,$$

$$J_K^5 = i\frac{q}{|q|}2MP_K.$$

再比较 (19) 式易见由电极化 P_K 产生的束缚电荷 $-\partial_K P_K$ 与自由电荷 ρ 除原点外处处相消，结果如同电荷全集中在原点．总之，在点磁单极周围有一 Dirac 粒子零能束缚态，不仅能量、动量等都不改变，且除原点外电荷分布也不改变．

由于势 A 在原点奇异(这是规范无关的，因为场强也奇异)，故此方程的算子在原点奇异，与此相关存在有 Lipkin 困难．我们所求解在原点也存在有奇异．严格些应该说本文采用原点的边界条件：$f^+(0) = 0$，当 $q > 0$ (或 $f^-(0) = 0$，当 $q < 0$)，如文献 [5] 所讨论．或者为避免 Lipkin 困难，文献[6]设 Dirac 粒子还有小反常磁矩 $\frac{\nu e}{2M}(1+\kappa)$ 可证仅当 $\kappa > 0$ 时才有 $\chi^\pm = f^\pm(r)\eta_m$ 型解，但这时

$$f(r) = \frac{1}{r} e^{-Mr - \frac{|\kappa q|}{2Mr}}, \quad (\kappa > 0) \tag{20}$$

当 $\kappa < 0$ 时无此解．此解的角动量仍限制为 $j = |q| - \frac{1}{2}$，其性质与我们前面的讨论完全类似，但它在 $r \to 0$ 与 $r \to \infty$ 时都趋于零，无原点奇异，避免了 Lipkin 困难．有意思的是，这时除了上述类型解外还存在有 $j \geqslant |q| + \frac{1}{2}$ 的零能解，它们仍为 $\gamma_4\gamma_5$ 的本征态，但不再是 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{r}$ 的本征态，也非宇称的本征态．当阵类示性数一定时，它们的数目可以有无穷多，但是当 $\kappa > 0$ 与 $\kappa < 0$ 时，$\gamma_4\gamma_5$ 本征值分别为 ± 值的 j, m, q 相等的解一一对应，解数相等，而仅(20)型的解数不一样，将 $\kappa \gtrless 0$ 在一块考虑，仍有关系如(18)．

二、$SU(2)$ 规范场中零能费米子

静球对称不可约化 $SU(2)$ 无源规范场必为同步的，可选同步规范表为：

$$W_i^\sigma = \varepsilon_{i\sigma\tau}[r\varphi(r) - 1]x^\tau/er^2$$
$$W_4^\sigma = iG(r)x^\sigma/er. \quad [r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad i、\sigma、\tau = 1, 2, 3] \tag{21}$$

它可分解为可 Abel 化部分 A 与不可约化部分 B：

$$W_i^\sigma = A_i^\sigma + B_i^\sigma,$$
$$A_i^\sigma = -\varepsilon_{i\sigma\tau}x^\tau/er^2, \tag{22a}$$
$$B_i^\sigma = \varphi(r)\varepsilon_{i\sigma\tau}x^\tau/er. \tag{22b}$$

为使总能量有限，还要求它们满足如下渐近条件：

$$\begin{aligned} &r\varphi(r) \to 0, \quad G(r) \to i\beta, \quad (|\beta| > 0) \quad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时}) \\ &r\varphi(r) \to 1, \quad G(r) \to 0. \quad\quad\quad\quad\quad\; (\text{当 } r \to 0 \text{ 时}) \end{aligned} \tag{23}$$

满足上条件的无源解已知形式为：

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{\beta}{\mathrm{sh}\beta r}, \\ G(r) &= -i\left(\frac{1}{r} - \beta\,\mathrm{cth}\,\beta r\right). \end{aligned} \tag{24}$$

在此规范场中 $M = 0$ 的自旋 1/2 同位旋 I 的粒子满足如下经典 Dirac 方程：

$$\gamma_\mu \nabla^\mu \psi = 0. \tag{25}$$

其中

$$\nabla^\mu = \partial^\mu - ieT^a W_a^\mu, \tag{26}$$

T^a 为 $SU(2)$ 产生算符．以下选 γ_5 对角表象：

$$\gamma_K = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_K \\ i\sigma_K & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{27}$$

而波函数表为：

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^- \end{pmatrix}. \tag{28}$$

其中 $\chi^\pm$ 都是自旋二维、同位旋 $2I + 1$ 维旋量．由(25)得定态方程：

$$(i\sigma_K\nabla_K \pm G(r)T^\sigma x^\sigma/r)K^\pm = \pm EK^\pm. \tag{29}$$

由于同步球对称性，存在守恒的总角动量：

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

为便于分离变量，仍采用推广的 K 算子，这时仍有如上节(7)、(8)式的关系，但其中规范协变微商 ∇ 应改为仅仅以规范势可约部分 A_i^a((22a)式）为联络的规范协变微商 $\nabla^{(A)}$ 方可与 J 对易，即：

$$\nabla_i^{(A)} = \partial_i - ieA_i^aT^a, \tag{26a}$$

$$K = -i\varepsilon_{ijK}\sigma_i x_j \nabla_K^{(A)} + 1, \tag{7a}$$

$$\sigma_i\nabla_i^{(A)} = \sigma_r\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\sigma_r K. \tag{8a}$$

于是可将(29)式化为：

$$\left[\sigma_r\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\sigma r K - i\varphi(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{T}) \mp iG(r) \times\left(\boldsymbol{T}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right]x^\pm = \mp iEx^\pm. \tag{30}$$

在具体对上式分离径向与角向变量以便求解时，通常采取对固定极轴投影的本征态为基矢展开，使计算非常麻烦．现将 $x^\pm$ 的角向部分按反映问题对称性的局部坐标系的完备基展开，即令：

$$x^\pm = \sum_{\mu\nu} f_{\mu,\nu}^\pm(r)\zeta_{\mu,\nu}(\varphi, \theta, \gamma). \tag{31}$$

其中

$$\zeta_{\mu,\nu} = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}D_{m,\mu+\nu}^j s_\mu i_\nu. \tag{32}$$

而 i_ν 为电荷算符$\left(\text{同位旋 } \boldsymbol{T} \text{ 在局部极轴上投影 } T_r = \boldsymbol{T}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$的本征态，它与同位旋在固定极轴上的投影 T_Z 的本征态 I_ν 可由规范变换联系如下：

$$i_\nu(\varphi, \theta, \gamma) = \sum_{\nu'} I_{\nu'}D_{\nu'\nu}^I(\varphi, \theta, \gamma).$$

而上节中 $\eta_{m,\mu}^j$ 乘以 I_3 再经上规范变换，可变为本节所选的 $\zeta_{\mu\nu}$（注意与本节 A_μ^a 对应的磁荷 $g = -1$，故 $q = -\nu$）.

$\zeta_{\mu,\nu}$ 是 J^2, J_Z, σ_r, T_r 的共同本征态，有如下性质：

$$\begin{aligned} J^2\zeta_{\mu,\nu} &= j(j+1)\zeta_{\mu,\nu}, \\ J_Z\zeta_{\mu,\nu} &= m\zeta_{\mu,\nu}, \\ \sigma_r\zeta_{\mu,\nu} &= 2\mu\zeta_{\mu,\nu}, \\ T_r\zeta_{\mu,\nu} &= \nu\zeta_{\mu,\nu}, \\ K\zeta_{\mu,\nu} &= K_\nu\zeta_{-\mu,\nu}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{T})\zeta_{\mu,\nu} = -i2\mu\alpha_{\nu+\frac{1}{2}+\mu}^I\zeta_{-\mu,\nu+2\mu}.$$

其中

$$\alpha_\nu^I = (I+\nu)^{\frac{1}{2}}(I-\nu+1)^{\frac{1}{2}},$$

$$K_\nu = \alpha^j_{|\nu|+\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \nu^2}\ .$$

将(31)(32)代入(30),并利用(33)各式,取 $E=0$,再利用 $\zeta_{\mu,\nu}$ 的正交完备性,得零能解径向部分满足下方程组:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)f^{\pm}_{\mu,\nu}(r) - \frac{K_\nu}{r}f^{\pm}_{-\mu,\nu}(r) + \alpha^I_{\nu+\frac{1}{2}+\mu}\varphi(r)f^{\pm}_{-\mu,\nu+2\mu}(r) \mp 2\mu\nu iG(r)f^{\pm}_{\mu,\nu}(r) = 0, \tag{34}$$

首先分析此方程组在无穷远处的渐近性质,由(23)知

$$iG(r)\to -\beta, \quad (\text{不失一般性以下假设 } R_e\beta > 0)$$

由要求方程(34)最后一项系数均为正看出如 $\mu\nu>0$ 只可能有 γ_5 的正本征值的解 $f^+(f^-=0)$, 如 $\mu\nu<0$, 只可能有 γ_5 的负本征值的解 $f^-(f^+=0)$.

由方程(34)第二项使 $f_{\mu,\nu}(r)$ 与 $f_{-\mu,\nu}(r)$ 相关, 如 $\nu\neq 0$, 与方程最后一项必取正号要求矛盾,故必须

$$K_\nu = 0. \quad (\text{当 } \nu \neq 0)$$

由方程(34)第三项使 $f_{\mu\nu}$ 与 $f_{-\mu,\nu+2\mu}$ 相关, 为满足联立方程组各方程最后一项符号相同的要求, $\mu\nu$ 与 $-\mu(\nu+2\mu)$ 必须同号,即 ν 必须满足下三条件之一:

$$\nu = 0, \quad \text{或} \quad \nu = -2\mu, \quad \text{或} \quad \nu = -\mu.$$

总之有两种情况:

1. 当 Dirac 粒子同位旋 I 为任意半整数时,可归一的静零能解必满足:

$$\nu = -\mu = \pm\frac{1}{2}, \quad K_\nu = 0, \quad \text{即} \quad j = 0; \tag{35a}$$

2. 当 Dirac 粒子同位旋 I 为任意整数时,必符合下条件:

$$\nu = -2\mu = \pm 1, \quad K_\nu = 0, \quad \text{即} \quad j = \frac{1}{2};$$
$$\text{及} \quad \nu = 0, \quad \text{而由} \ j = \frac{1}{2} \ \text{知} \quad K_0 = 1. \tag{35b}$$

二种情况均只含 γ_5 负本征值的 $f^-(f^+=0)$, 以下为符号简化, 均略去 f^- 的上标而记为 f.

先讨论粒子同位旋 I 为半整数时的情况,将条件(35a)代入(34)得:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)f_{\mu,-\mu}(r) + \alpha^I_{\frac{1}{2}}\varphi(r)f_{-\mu,\mu}(r) - \frac{1}{2}iG(r)f_{\mu,-\mu}(r) = 0. \tag{36}$$

令

$$F^{\pm}(r) = f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(r) \pm f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(r), \tag{37}$$

得

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r} \pm \alpha^I_{\frac{1}{2}}\varphi(r) - \frac{1}{2}iG(r)\right)F^{\pm}(r) = 0. \tag{38}$$

其中 $\alpha^I_{\frac{1}{2}}=I+\frac{1}{2}$，再由规范场的边界条件知 $F^+(r)$ 只有平庸解：

$$F^+(r)=f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(r)+f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(r)=0, \tag{39}$$

而 $F^-(r)=2f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(r)$ 有满足边界条件的唯一非平庸解．它是电荷数 $\nu=\pm\frac{1}{2}$ 的混合态，同时也是自旋在局部极轴上投影 σ_r 的不同本征态的混合，且处处保持粒子自旋与电磁场的内禀旋方向相反，使得总角动量为零．此解是 γ_5 本征值为 -1 的本征态，由于 $J=0$，解不简并，解数为 1．这因对静球对称不可约化 $SU(2)$ 规范场只能有同步解，故限为 $g=-1$，而边界条件又限制为 (35a)，$|\nu|=\frac{1}{2}$，故第一陈类示性数只能为 $1(2|q|=2|\nu|=1)$，即当 Dirac 粒子同位旋为任意半整数时，零能解都是非简并的．

利用规范势的明显解析表达式(24)，还可具体积分得 Dirac 粒子零能解径向部分的解析表达式为：

$$f(r)=cr^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{sh}\,\beta r)^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{th}\frac{\beta r}{2}\right)^{I+\frac{1}{2}}\left(I=N+\frac{1}{2},\quad N=0,1,2,\cdots\right) \tag{40}$$

由此式更明显看出，当 $r\to\infty$ 时，解按指数衰减，分布半径由规范势第 4 分量在无穷远处的渐近值 β 决定（它相当于 Higgs 场的真空平均值）．此解在原点的性质与同位旋 I 有关，当 $I=\frac{1}{2}$ 时在原点趋于有限值，而当 I 为大于 $\frac{1}{2}$ 的半整数时，在原点趋于零．

下面再讨论当同位旋为任意整数时的情况，将条件 (35b) 代入(34)得：

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)f_{\mu,0}(r)-\frac{1}{r}f_{-\mu,0}(r)+\alpha\varphi(r)f_{-\mu,2\mu}(r)=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)f_{\mu,-2\mu}(r)+\alpha\varphi(r)f_{-\mu,0}(r)-iG(r)f_{\mu,-2\mu}(r)=0,\end{cases} \tag{41}$$

其中

$$\alpha=\alpha^I_0=\alpha^I_1=\sqrt{I(I+1)}.$$

令

$$F^\pm_0(r)=f_{\frac{1}{2},0}(r)\pm f_{-\frac{1}{2},0}(r),\quad F^\pm_1(r)=f_{\frac{1}{2},-1}(r)\pm f_{-\frac{1}{2},1}(r) \tag{42}$$

则方程组(41)可化为两组方程：

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial r}F^+_0(r)+\alpha\varphi(r)F^+_1(r)=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}-iG(r)\right)F^+_1(r)+\alpha\varphi(r)F^+_0(r)=0,\end{cases} \tag{43a}$$

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}\right)F^-_0(r)-\alpha\varphi(r)F^-_1(r)=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}-iG(r)\right)F^-_1(r)-\alpha\varphi(r)F^-_0(r)=0.\end{cases} \tag{43b}$$

在原点这些方程的解常为一个正则函数与一个奇异不可归一函数的线性组合．而它们在无穷远处的渐近行为：(43a) 的解 $\sim c_1+c_2e^{-\beta r}$，故一般在原点正则的解在 $r\to\infty$ 时不

可归一，即只有平庸解：

$$F_0^+(r) \equiv f_{\frac{1}{2},0}(r) + f_{-\frac{1}{2},0}(r) = 0, \quad F_1^+(r) \equiv f_{\frac{1}{2},-1}(r) + f_{-\frac{1}{2},1}(r) = 0, \tag{44}$$

而(43b)的解在无穷远处的渐近行为 $\sim c_1 r^{-2} + c_2 e^{-\beta r}$，故可得唯一可归一解满足(43b)及条件(44)。它是电荷数 $\nu = \pm 1, 0$ 的混合态，同时也是自旋在局部极轴上不同投影的混合态，其中电磁场内禀旋非零部分处处保持与粒子自旋方向相反，使总角动量 $j = \frac{1}{2}$。当 $r \to \infty$ 时的渐近行为由两部分组成，其中 $\nu = \pm 1$ 部分按指数衰减，而 $\nu = 0$ 部分则按 r^{-2} 衰减。此解是 γ_5 的本征值为 -1 的本征态，但由于 $J = \frac{1}{2}$，故双重简并，解数也满足：

$$n = 2|\nu_{\max}| = 2|q_{\max}|.$$

利用规范势的明显解析表达式(24)式，对同位旋矢量 Dirac 粒子，还可具体积分(43b)得：

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{2},0}(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}\,\beta r^2} - \frac{\beta}{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}^2\beta r}, \\ f_{\frac{1}{2},-1}(r) &= \beta\frac{\mathrm{ch}\,\beta r}{\mathrm{sh}^2\beta r} - \frac{1}{r\,\mathrm{sh}\,\beta r}. \end{aligned} \tag{45}$$

在无穷远处 $f_{\frac{1}{2},-1}(r)$ 按指数衰减，而 $f_{\frac{1}{2},0}(r)$ 按 r^{-2} 缓慢衰减，而在原点它们都趋于有限值。

总之，在静球对称 $SU(2)$ 规范场中的可归一零能费米子解的数目仍等于第一陈类示性数，且它们都是 γ_5 本征值 -1 的本征态，而无 γ_5 正本征值的本征态，即零能解数仍由(18)式决定。

参考文献

[1] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.*, **49**(1977), 681.
[2] R. Jackiw, C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 3398.
[3] Y. Kazama, C. N. Yang, A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2387.
[4] N. K. Nielsen, B. Schroer, *Nucl. Phys.*, **B127**(1977), 493.
[5] C. J. Callias, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 3068.
[6] Y. Kazama, C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2300.

ZERO ENERGY FERMION IN TOPOLOGICAL NONTRIVIAL SPHERICAL SYMMETRICAL FIELD ON MINKOWSKI SPACE

HOU BO-YU

(*Northwest University*)

HOU BO-YUAN

(*Inner Mongolian University*)

ABSTRACT

This paper discusses the number of solution and physical property of zero energy fermions in the field of $U(1)$ pointwise monopole. It is interesting to point out that the anomaly source of PCAC lies on the monopole, and that the effective electric charge is concentrated at the point monopole.

This paper has separated explicitly the variables in the equation of the half spin particles with arbitrary isospins moving in the spherical symmetric sourceless $SU(2)$ gauge field. It is shown that the zero energy solution exists only when the total angular momentum $J=0$ and charge number $|\nu|=1/2$; or when $J=1/2$, $|\nu|=1,0$. The solutions with isospin equals to one or arbitrary half integrals are given explicitly.