

关于产生 S 态 $(\pi^+\pi^-)_S$ 原子的直通图

何炬 张肇西 何祚麻

(中国科学院高能物理研究所) (中国科学院理论物理研究所)

摘 要

本文求出了梯形近似下 $(\pi^+\pi^-)_S$ 态原子的相对论协变的 B-S 波函数, 并通过应用这一相对论协变的 B-S 波函数和假设复合场论微扰展开中的最低次项——“直通图”为主, 计算了过程

$$\pi^+ + n \rightarrow p + (\pi^+\pi^-)_S$$

的截面, 讨论了直通图的一些性质. 此外, 这一计算对如下更有兴趣的过程或许提供了粗略的估计:

$$\mu^+ + n \rightarrow (\mu^+\pi^-) + p.$$

一、引 言

在复合粒子量子场论的微扰展开式中, 一个显著特征是它确认存在“直通图”^[1]. 实验上检验是否存在这类“直通图”贡献的方法之一是, 借助于下列产生“反常”原子的实验, 如:

$$\mu^+ + n \rightarrow (\mu^+\pi^-) + p, \tag{1}$$

$$Q^- + p \rightarrow (Q^-\pi^+) + n, \tag{2}$$

$$\pi^+ + n \rightarrow (\pi^+\pi^-) + p, \tag{3}$$

等. 由于 μ^+ 介子和 π^- 介子之间只有电磁相互作用和弱相互作用, 因而通过电磁相互作用的媒介而形成的“直通图”(图 1), 将是产生 $(\mu^+\pi^-)$ 原子的主要机制. 特别是 $(\mu^+\pi^-)$

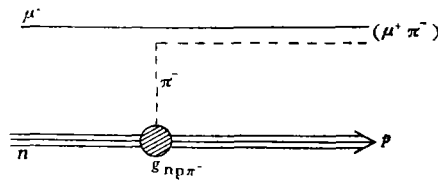


图 1

原子是中性粒子, 其它都是带电粒子, 这就可能从背景中分离出来. 对于 $(\pi^+\pi^-)$ 、 $(Q^-\pi^+)$ 等原子, 由于存在着强相互作用, 除“直通图”外, 还有别的产生机制. 但是, 从理论上研讨“直通图”所表现出的一些特征和行为, 仍具有一定的意义.

注意到 $(\mu^+\pi^-)$ 、 $(Q^-\pi^+)$ 等原子体系涉及不等质量的 $(1/2, 0)$ 、 $(3/2, 0)$ 粒子的 B-

S 方程, 求解这类波函数有一些复杂性. 为了研究产生原子的“直通图”所具有的一些特性, 我们将首先研究较为简单的过程

$$\pi^+(k) + n(n) \rightarrow (\pi^+\pi^-)_s(K)' + p(p), \quad (3')$$

(其中括号中的符号是四动量), 这时, 涉及的方程将是等质量的赝标粒子的 B-S 方程. 因此, 本文首先近似求解 $(\pi^+\pi^-)$ 原子的相对论协变的 B-S 波函数, 并进而用来讨论过程 (3). 当然, 这里的讨论是理论上的, 是未计及 $\pi^+\pi^-$ 介子间的强相互作用的. 实际上, 除“直通图”外, 还有由 $\lambda\phi_n^4$ 项的直接相互作用的贡献. 由于我们这里主要目的是研究“直通图”的一些特性, 因而略去强相互作用的贡献. 这里的计算可以看作是产生 $(\mu^+\pi^-)$ 原子的一个近似的描述.

二、关于 $(\pi^+\pi^-)$, (K^+K^-) 原子体系的 B-S 波函数

关于 $(\pi^+\pi^-)$ 原子体系曾经有 A. Nand 用瞬时相互作用近似求解梯形近似下的 B-S 方程^[2]. 但如果我们的目的是为了研讨高速飞行的原子的相对论扁缩效应的话, 必须获得一个相对论协变的波函数.

在 $\pi^+\pi^-$ 体系形成库仑原子的情况, 其零次项可仅取梯形近似下的 B-S 方程. 其高次图均可略去, 并且 $\pi^+\pi^-$ 间强相互作用也可略去, 因这时 $(\pi^+\pi^-)$ 原子半径远大于强相互作用的力程. 这时 $(\pi^+\pi^-)$ 原子的电磁束缚态的 B-S 方程可写为

$$\begin{aligned} & \left[\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right] \left[\left(p - \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right] \phi_p(p) \\ &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(p-q)^2} [(p+q)^2 - P^2] \phi_p(q). \end{aligned} \quad (4)$$

要严格求解这一方程将是很困难的. 但如果将这一方程和 Wick-Cutkosky 方程^[3,4] (以下简称 W-C 方程) 进行比较, 不难发现所多出的项仅是

$$\frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{(p+q)^2}{(p-q)^2} \phi_p(q). \quad (5)$$

由于 $(\pi^+\pi^-)$ 所形成的原子是弱耦合下的原子, 从 B-S 波函数的谱条件, 将不难证明 $\frac{P}{m}$

是 $O(\alpha)$ 的量级, $\frac{P_0}{m}$ 是 $O(\alpha^2)$ 的量级^[5]. 因而对式 (4) 在精度是 $O(\alpha)$ 量级情况下, 将完全能用 W-C 方程来逼近, 因而就有

$$\left[\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right] \left[\left(p - \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right] \phi_p(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(p-q)^2} P^2 \phi_p(q). \quad (6)$$

对于 W-C 方程仍不能精确求解. 但在等质量情况下, Cutkosky 曾给出一个相当精确的协变的近似波函数^[4],

$$\begin{aligned} \phi_n^{lm}(p) &\sim \left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} \right)^{-n} \left[p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} + (pP) \right]^{-1} \\ &\cdot \left[p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} - (pP) \right]^{-1} \cdot R^{n-l-1} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{X}{R} \right) \mathcal{Y}_l^m(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$R^2 = \left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} \right)^2 - \frac{4(pP)^2}{P^2} \left(m^2 + \frac{P^2}{4} \right)$$

$$X = p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4}, \tag{8}$$

C_n^l 是盖根鲍威多项式, \mathcal{Y}_l^m 是立体球谐函数. 和本征波函数(7)相对应的本征值是

$$-\frac{\alpha}{8n} \frac{P^2}{m^2} = \left(1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{1/2} \tag{9}$$

现在 α 很小, $P^2 \sim -4m^2$ 时有

$$\frac{\alpha}{2n} = \left(1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{1/2} \tag{10}$$

当 $(\pi^+\pi^-)$ 原子处在基态, 即有 $n = 1, l = 0$ 时, 式(7)就变为

$$\phi_1^0(p) = \frac{N}{\left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} \right) \left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} - (pP) \right) \left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} + (pP) \right)}, \tag{11}$$

并有 $m^2 + \frac{P^2}{4} = \frac{1}{4} \alpha^2 m^2$, 而 N 是归一化常数. 利用 B-S 波函数的正交归一条件

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q d^4q' \bar{\phi}_1^0(p) \frac{1}{2P_0} \frac{\partial}{\partial P_0} [O(P, q, q') - I(P, q, q')] \phi_1^0(p)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \bar{\phi}_1^0(p) \frac{1}{2P_0} \left\{ (2p_0 + P_0) \left[\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right] \right.$$

$$\left. - \frac{2P_0 \left[\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right] \left[\left(p - \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right]}{P^2} \right\} \phi_1^0 = 1. \tag{12}$$

略去 $O(\alpha^2)$ 量级的项, 易求出

$$N = 32 \sqrt{\pi} m^3 \left(1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{5/4} = 4\sqrt{2\pi} m^3 \alpha^{5/2}. \tag{13}$$

这样, 利用 W-C 方程的近似解, 便能得到所需要的相对论协变的波函数.

三、由“直通图”产生 $(\pi^+\pi^-)_S$ 原子的计算

在有了波函数(11)和(13)后, 将不难用来计算产生 $(\pi^+\pi^-)_S$ 原子的过程(3)'. 和过程(3)'相应的“直通图”(图2).

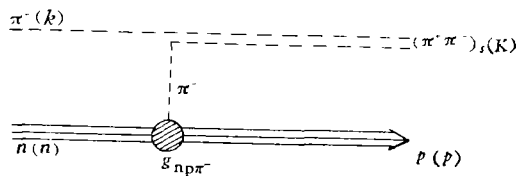


图 2

在探讨这一过程的反应截面以前,首先探讨一下这一过程的运动学.这是一个二体的吸热反应,有能动量守恒律是

$$k + n = K + p, \quad (14)$$

等式两边取平方,就得

$$k^2 + n^2 + 2kn = K^2 + p^2 + 2Kp. \quad (15)$$

令 $p = k + n - K$, 取实验室系,就有

$$-m_n^2 - m_n^2 - 2k_0 m_n = 4m_n^2 - m_p^2 + 2|\mathbf{K}||\mathbf{k}|\cos\theta - 2K_0 k_0 - 2K_0 m_n, \quad (16)$$

其中 θ 是 \mathbf{K} 和 \mathbf{k} 的夹角. 将上式整理一下,可得

$$K_0(m_N + k_0) = \frac{5}{2} m_n^2 + k_0 m_N + |\mathbf{K}||\mathbf{k}|\cos\theta, \quad (17)$$

进一步利用能量和动量间的关系

$$|\mathbf{K}| = \sqrt{K_0^2 - 4m_n^2}, \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{k_0^2 - m_n^2}, \quad (18)$$

就可算出

$$\begin{aligned} K_0 = f(k_0, \cos\theta) = & \left[(m_N + k_0) \left(\frac{5}{2} m_n^2 + k_0 m_N \right) + |\mathbf{k}||\cos\theta| \right. \\ & \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{2} m_n^2 + k_0 m_N \right)^2 - 4m_n^2(m_N + k_0)^2 + 4m_n^2 k^2 \cos^2\theta} \Big] / \\ & [(m_n + k_0)^2 - (k_0^2 - m_n^2) \cos^2\theta]^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

同样,对反冲质子有

$$E_p = k_0 + m_n - K_0. \quad (20)$$

不难看出,式(19)和(20)虽较为复杂,但在函数关系上却是确定的.实际上,上两式中的根式恒为正值的要求限制了阈能和 $\cos\theta$ 的取值.例如在阈能值附近, $\cos\theta$ 所可能取的值只限于朝前角度的某一个锥.

在有了相对论协变的波函数之后,将不难把与上述“直通图”相应的跃迁矩阵元写出来,这时

$$\begin{aligned} \langle (\pi^+ \pi^-), p | \pi^+, n \rangle = & -i(2\pi)^4 \delta^4(k + n - K - p) \frac{1}{\sqrt{4k_0 K_0}} \Gamma_K \left(k - \frac{K}{2} \right) \\ & \cdot \frac{g_{\pi p \pi^-}}{(K - k)^2 + m_n^2} \sqrt{\frac{m_n}{E_n}} \cdot \sqrt{\frac{m_p}{E_p}} \bar{u}(p) \gamma_5 u(n), \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\Gamma_K(q) = \frac{N}{q^2 + \frac{K^2}{4} + m_n^2}, \quad N = 4\sqrt{2\pi m_n^3 \alpha^{5/2}}. \quad (22)$$

由计算截面的普遍公式,可知

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{g_{\pi p \pi^-}^2 m_n m_p}{(2\pi)^2 2k_0 K_0 E_n E_p} \cdot \frac{N^2}{(K^2 - 2kK)^4} \cdot \sum_{s, s'} |\bar{u}(p) \gamma_5 u(n)|^2 \\ & \cdot \frac{d\mathbf{K} d\mathbf{n}}{\mathcal{J}} \cdot \delta(\mathbf{k} + \mathbf{n} - \mathbf{K} - \mathbf{p}) \delta(k_0 + E_n - K_0 - E_p), \end{aligned} \quad (23)$$

其中 \mathcal{J} 是粒子流密度。由于

$$\sum_{s,s'} |\bar{u}(p) \gamma_5 u(n)|^2 = \frac{-(pn) - m_n m_p}{m_n m_p}, \quad (24)$$

$$\delta(\mathbf{k} + \mathbf{n} - \mathbf{K} - \mathbf{p}) d\mathbf{n} = 1, \quad (25)$$

$$\delta(k_0 + E_n - K_0 - E_p) d\mathbf{K} \rightarrow \frac{|\mathbf{K}| K_0 d\Omega}{\frac{\partial}{\partial K_0} (K_0 + E_p)}, \quad (26)$$

并由于

$$E_p = \sqrt{m_p^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{n} - \mathbf{K})^2}, \quad (27)$$

因而

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K_0} (K_0 + E_p) &= 1 + \frac{\mathbf{K}(\mathbf{K} - \mathbf{k} - \mathbf{n})}{E_p |\mathbf{K}|} \cdot \frac{\partial |\mathbf{K}|}{\partial K_0} \\ &= 1 - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}}{E_p K_0} \cdot \frac{K_0}{|\mathbf{K}|} = \frac{E_p |\mathbf{K}| - \mathbf{p} \cdot \mathbf{K}}{E_p \cdot |\mathbf{K}|}. \end{aligned} \quad (28)$$

在实验室系中,有

$$\mathcal{J} = v = \frac{|\mathbf{k}|}{k_0}. \quad (29)$$

将以上各式代入(23),对 $d\varphi$ 积分,最终可得

$$d\sigma = \frac{g_{\pi p \pi^-}^2}{4\pi} \cdot \frac{N^2}{(2k_0 K_0 - 2|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{K}| \cos\theta - 4m_\pi^2)^4} \cdot \frac{(E_p - m_p) |\mathbf{K}| \sin\theta d\theta}{|\mathbf{k}| (E_p + |\mathbf{K}| - |\mathbf{k}| \cos\theta)}, \quad (30)$$

其中 E_p, K_0 是 k_0 和 $\cos\theta$ 的函数,由式(19),(20)来表示,

$$\mathbf{k} = \sqrt{k_0^2 - m_\pi^2}, \quad |\mathbf{K}| = \sqrt{K_0^2 - 4m_\pi^2}.$$

式(30)当然是很复杂的,严格积出角度的积分将很困难,但是可以在高能极限下求出截面对能量的依赖关系。

当 $k_0, K_0 \gg m_\pi$ 时,有 $|\mathbf{K}| \sim K_0, |\mathbf{k}| \sim k_0$, 把 m_π 取为零,做 k_0 大时的展开,保留到 $\frac{1}{k_0}$ 的项,因而有

$$K_0 \approx \frac{m_N k_0 (1 + |\cos\theta|) + \frac{5}{2} m_\pi^2 + m_N^2 - \frac{3}{2} m_\pi^2 |\cos\theta| - \frac{2m_\pi^2 k_0}{m_N} |\cos\theta| (1 - \cos^2\theta)}{k_0 (1 - \cos^2\theta) + 2m_N + \frac{m_N^2 + m_\pi^2 \cos^2\theta}{k_0}}.$$

当略去 m_π 时,

$$K_0 \sim \frac{k_0}{1 + \frac{k_0}{m_N} (1 - \cos\theta)}, \quad (31)$$

而

$$k_0 - K_0 \approx \left[k_0^2(1 - \cos^2 \theta) + m_N k_0(1 - |\cos \theta|) + 2m_\pi^2 k_0(1 - \cos^2 \theta) \right] |\cos \theta| \\ + m_\pi^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{3}{2} |\cos \theta| - \frac{5}{2} \right) \Big/ \left\{ k_0(1 - \cos^2 \theta) + 2m_N + \frac{m_\pi^2 + m_\pi^2 \cos^2 \theta}{k_0} \right\}^{-1},$$

并有

$$E_p - m_p \approx E_p - m_N = k_0 - K_0 \approx \frac{\frac{k_0^2}{m_N}(1 - \cos \theta)}{1 + \frac{k_0}{m_N}(1 - \cos \theta)}. \quad (32)$$

由(17)和(32)可知

$$2k_0 K_0 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{K}|\cos \theta - 4m_\pi^2 = 2(k_0 - K_0)m_\pi + m_\pi^2 \\ \approx \frac{2k_0^2(1 - \cos \theta)}{1 + \frac{k_0}{m_N}(1 - \cos \theta)} + m_\pi^2. \quad (33)$$

令 $|\mathbf{K}| \sim K_0$, $|\mathbf{k}| \sim k_0$, 将(31)–(33)代入(30), 就有

$$d\sigma = \frac{g_{\pi p \pi^-}^2}{4\pi} \cdot \frac{N^2 k_0^2 \left[1 + \frac{k_0}{m_N}(1 - \cos \theta) \right] (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta}{16m_N^2 \left[\left(k_0^2 + \frac{m_\pi^2 k_0}{2m_N} \right) (1 - \cos \theta) + \frac{m_\pi^2}{2} \right]^4} \\ = \frac{g_{\pi p \pi^-}^2}{4\pi} \cdot \frac{N^2 k_0^2 \left(1 + \frac{2k_0}{m_N} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{64m_N^2 \left[\left(k_0^2 + \frac{m_\pi^2 k_0}{2m_N} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m_\pi^2}{4} \right]^4}. \quad (34)$$

这一式子的特点是在小角度区域有一尖锐的峰值, 因而可将分子上的 $\frac{2k_0}{m_N} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ 的项略去, 这时就有

$$d\sigma \approx \frac{g_{\pi p \pi^-}^2}{4\pi} \cdot \frac{N^2 k_0^2}{2m_N^2} \cdot \frac{\theta^3 d\theta}{(k_0^2 \theta^2 + m_\pi^2)^4}. \quad (35)$$

对 $d\theta^2$ 积分后, 就有

$$\sigma \approx \frac{g_{\pi p \pi^-}^2}{4\pi} \cdot \frac{N^2}{24m_N^2 m_\pi^4 k_0^2} = \frac{g_{\pi p \pi^-}^2}{4\pi} \cdot \frac{4\pi \alpha^5}{3} \frac{m_\pi^2}{m_N^2} \frac{1}{k_0^2}, \quad (36)$$

即这一反应截面将随入射能量的平方而迅速下降。注意到

$$g_{\pi p \pi^-} = \sqrt{2} g, \quad \frac{g_{\pi p \pi^-}^2}{4\pi} = 2 \cdot \frac{g^2}{4\pi} \approx 29, \quad \alpha^5 \approx 2 \times 10^{-11},$$

如果令 $k_0 \sim m_N$, 那末这时截面

$$\sigma \sim 50 \times 10^{-12} \times \frac{1}{m_N^2} = 2 \times 10^{-38} \text{cm}^2!$$

这一反应截面无疑是较小的。分析起来, “直通图”贡献较小的原因在于(13)式中的归一化常数太小。但如果是“强耦合”体系, 即复合粒子有较大结合能时, 那末可期待“直通图”将成为形成复合粒子的主要通道。注意到这一产生 $(\pi^+ \pi^-)$ 原子过程是一吸热反应, 在阈

能附近其截面必然是上升的。因而这一反应截面必将有一极值。利用数值积分可将这一截面求出来。但估计起来,此极值亦约在 10^{-37}cm^2 量级,因而仍是较小的。然而,这一反应的特点是所形成的 $(\pi^+\pi^-)$ 原子集中在某一较小的立体角内,不论是引出或探测均较容易,并且其它构成“背景”的反应道均较小,特别是 μ^+ 介子打在核子上形成 $(\mu^+\pi^+)$ 原子过程中更是如此。

最后需再次强调的是,对于 $(\pi^+\pi^-)$ 原子来说,这一“直通图”产生机制在实际过程中并不是主要的,因为这里有更重要的直接通过 $\lambda\phi^4$ 的相互作用产生 $(\pi^+\pi^-)$ 原子的机制,它将比“直通图”贡献的截面大很多。因此,上述计算只能了解为对“直通图”的研究,或许还可以把它看作是 μ 介子与核子反应形成 $(\mu^\pm\pi^\mp)$ 原子过程在不计 μ 介子自旋效应情形下的一个近似描述。

参 考 文 献

- [1] 何祚庥、张肇西、黄涛, 物理学报, **25** (1976), 215.
- [2] A. Nard, *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 1531.
- [3] G. C. Wick, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1124.
- [4] R. E. Cutkosky, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1135.
- [5] 中国科学院数学研究所理论物理研究室, 北京大学理论物理研究室基本粒子组, 原子能, **7,8** (1966), 507.

ON THE “DIRECT CHANNEL DIAGRAM” OF THE PRODUCTION OF THE $(\pi^+ \pi^-)_s$ S-STATE ATOMS

HE JU ZHANG ZHAO-XI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

HE ZUO-XIU

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper we work out the relativistic covariant B-S wave function for the $(\pi^+ \pi^-)_s$ atoms. Some properties of the “direct channel diagram” of the production the $(\pi^+ \pi^-)_s$ atoms are discussed by calculating the cross-section of the process

$$\pi^+ + n \rightarrow p + (\pi^+ \pi^-)_s$$

with the help of the relativistic covariant wave function and assuming the lowest term in the perturbation expansion series of the quantized composite field theory—the “direct channel diagram” is dominant. Besides this calculation perhaps presents a rough estimate for the interesting process $\mu^+ + n \rightarrow (\mu^+ \pi^-) + p$.