

# 不同质量层子与反层子的 Bethe-Salpeter 方程和介子的 $SU(4)$ 质量关系

高 崇 寿  
(北 京 大 学)

## 摘 要

本文把在瞬时相互作用下介子 Bethe-Salpeter 方程求解的理论推广到组成介子的层子和反层子质量不一定相等的情形。在层子质量很重的假定下,考虑相互作用是赝标势和静矢势为主,导出了介子  $SU(4)$  质量分裂公式。分析了在粲粒子发现后  $SU(4)$  一级质量关系遇到的困难,这些困难在本文得到的质量公式中可以克服。特别是在谐振子位势下得到的质量公式不仅能同时较好地解释基态和径向激发态的质量,而且所定出的层子有效质量还与解释重子磁矩所要求的有效质量基本相符。最后利用得到的质量关系讨论了最近发现的重粒子  $Y$ 。

—

层子模型中一个重要的问题是如何给出强子的结构波函数。工作 [1,2] 中,曾利用 Bethe-Salpeter (以下简化为 B-S) 方程对瞬时相互作用位势近似下的介子波函数的性质和求解问题进行了普遍的讨论。当时是假定了层子与反层子质量相等。但是除纯中性介子外,一般说来,组成介子的层子与反层子的质量可能并不相等,因此就需要研究层子与反层子质量不相等的情形。

层子质量为  $M_1$ , 反层子质量为  $M_2$  时,介子结构波函数  $\chi_p(p)$  满足的 B-S 方程可表为:

$$(i\hat{p}_1 + M_1)\chi_p(p)(i\hat{p}_2 + M_2) = \Gamma_p(p), \quad (1.1)$$
$$\Gamma_p(p) = (U\chi_p(p)),$$

其中  $p_1, -p_2$  分别为层子和反层子的四维动量,  $P$  为介子四维动量,  $p$  为层子与反层子的“相对动量”,它们与  $p_1, p_2$  之间的联系为:

$$p_1 = p + aP, \quad p_2 = p - bP, \quad a + b = 1, \quad (1.2)$$

其中  $a, b$  为  $M_1, M_2$  的函数,并且当  $M_1 = M_2$  时,  $a = b = \frac{1}{2}$ , 即还原到 [1,2] 中讨论的情形。  $\Gamma_p(p)$  为顶角函数,  $U$  是包括旋量结构的积分变换,它代表了有效相互作用,其一般形式和性质在 [1] 中已给出。为了讨论起来比较简洁,一律采用 [1,2] 中的符号,并且

都是在质心系进行讨论。

在[1]中已给出瞬时相互作用下  $\Gamma_P(\mathbf{p})$  实际上对  $p_0$  无依赖性, 可表为:

$$\Gamma_P(\mathbf{p}) = \sum_i \sum_j \Gamma_i \int U_{ij}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'; P) \phi_P(\mathbf{p}') d^3 \mathbf{p}' \Gamma_j^\dagger, \quad (1.3)$$

其中  $\phi_P(\mathbf{p}) = \int \chi_P(p) dp_0$  为质心系三维波函数,  $\Gamma_i$  为某种 Dirac 矩阵。由(1.1)给出:

$$\chi_P(p) = [E_1^2 - (p_0 + am)^2]^{-1} [E_2 - (p_0 - bm)^2]^{-1} \cdot [(p_0 + am)\gamma_4 + B_1] \Gamma_P(\mathbf{p}) [(p_0 - bm)\gamma_4 + B_2], \quad (1.4)$$

其中  $E_i = \sqrt{M_i^2 + \mathbf{p}^2}$ ,  $B_i = -i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + M_i$ 。将(1.4)对  $p_0$  积分给出:

$$\begin{aligned} \phi_P(\mathbf{p}) = & \frac{\pi i}{E_1 E_2 [(E_1 + E_2)^2 - m^2]} \\ & \cdot [-E_1 E_2 (E_1 + E_2) \gamma_4 \Gamma_P(\mathbf{p}) \gamma_4 + (E_1 + E_2) B_1 \Gamma_P(\mathbf{p}) B_2 \\ & + m(E_1 \gamma_4 \Gamma_P(\mathbf{p}) B_2 - E_2 B_1 \Gamma_P(\mathbf{p}) \gamma_4)], \end{aligned} \quad (1.5)$$

利用(1.5)可以证明  $\phi_P(\mathbf{p})$  满足的瞬时相互作用条件为:

$$E_2 B_1 \gamma_4 \phi_P(\mathbf{p}) + E_1 \phi_P(\mathbf{p}) \gamma_4 B_2 = 0. \quad (1.6)$$

对于  $0^-$  介子, 质心系三维波函数的一般形式为<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \phi_P(\mathbf{p}) = & \gamma_5 \varphi_1 + \gamma_4 \gamma_5 \left( \frac{1}{M^2} \varphi_3'' - \varphi_2 \right) \\ & - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_5 \frac{1}{M^2} \varphi_3' + i\gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_5 \frac{1}{M} \varphi_4, \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中  $M$  是某质量量纲的参量。利用(1.6)式给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \varphi_3' &= \frac{E_2 - E_1}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \varphi_1, \\ \frac{1}{M} \varphi_4 &= \frac{E_1 + E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \left( \frac{1}{M^2} \varphi_3'' - \varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

因此, 在瞬时相互作用下,  $0^-$  介子质心系三维波函数的形式为:

$$\begin{aligned} \phi_P(\mathbf{p}) = & \gamma_5 \varphi_P + \gamma_4 \gamma_5 \varphi_A + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_5 \frac{E_1 - E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \varphi_P \\ & + i\gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_5 \frac{E_1 + E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \varphi_A, \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中  $\varphi_P = \varphi_1$ ,  $\varphi_A = \frac{1}{M^2} \varphi_3'' - \varphi_2$ 。

在上面的结果中, 如果取  $M_1 = M_2$ , 显然都还原到[1]中给出的结果。要强调的是, 现在是在  $M_1$  与  $M_2$  不一定相等的情形, 普遍证明了在瞬时相互作用近似下,  $0^-$  介子波函数的求解问题可以从在四维动量空间(赝欧氏空间)中解四个函数的联立方程归结为在三维动量空间中解两个函数的联立方程。也就是说, [1]中所讨论的特性和优点仍然保持。

## 二

从(1.9)出发,得到顶角函数  $\Gamma_p(\mathbf{p})$  为:

$$\Gamma_p(\mathbf{p}) = \gamma_5 g_p + \gamma_4 \gamma_5 g_A + i \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_5 g'_A + i \gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_5 g'_T, \quad (2.1)$$

其中:

$$\begin{aligned} g_p &= \frac{1}{2\pi i} U^p \varphi_p, & \mathbf{p} g'_A &= \frac{1}{2\pi i} V^A \mathbf{p} \frac{E_1 - E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \varphi_p, \\ g_A &= \frac{1}{2\pi i} U^A \varphi_A, & \mathbf{p} g'_T &= \frac{1}{2\pi i} V^T \mathbf{p} \frac{E_1 + E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \varphi_A, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中带上标的  $U$  和  $V$  代表对波函数中各旋量结构的有效位势(或称投影位势),它们可表为十种可能的耦合(用带下标的  $U$  和  $V$  代表)的线性组合,其组合系数为由本征方程  $\Gamma_i \Gamma_\phi \Gamma_i^\dagger = \lambda_{i\phi} \Gamma_\phi$  所确定的本征值  $\lambda_{i\phi}$  给出<sup>[1]</sup>.  $\lambda_{i\phi}$  的值由表 1 给出.

将(2.1)式代入(1.5)式,给出

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{\pi i (E_1 M_2 + E_2 M_1)}{E_1 E_2 [(E_1 + E_2)^2 - m^2]} \left[ \frac{(E_1 + E_2)^2}{M_1 + M_2} \tilde{g}_p + m \tilde{g}_A \right], \\ \varphi_A &= \frac{\pi i (E_1 M_2 + E_2 M_1)}{E_1 E_2 [(E_1 + E_2)^2 - m^2]} [m \tilde{g}_p + (M_1 + M_2) \tilde{g}_A], \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p &= g_p - \frac{E_1 - E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \mathbf{p}^2 g'_A, \\ \tilde{g}_A &= g_A - \frac{E_1 + E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \mathbf{p}^2 g'_T. \end{aligned} \quad (2.4)$$

再利用(2.2)式,得到  $\varphi_p$  和  $\varphi_A$  的联立方程:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{(E_1 + E_2)^2}{M_1 + M_2} - \frac{E_1 M_2 + E_2 M_1}{2E_1 E_2} U^A + \frac{E_1 + E_2}{2E_1 E_2} \mathbf{p} \cdot V^T \mathbf{p} \frac{E_1 + E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \right] \varphi_A &= m \varphi_p, \\ \left[ (M_1 + M_2) - \frac{E_1 M_2 + E_2 M_1}{2E_1 E_2} U^p + \frac{E_1 - E_2}{2E_1 E_2} \mathbf{p} \cdot V^A \mathbf{p} \frac{E_1 - E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \right] \varphi_p &= m \varphi_A. \end{aligned} \quad (2.5)$$

消去  $\varphi_A$  得到  $\varphi_p$  满足方程.

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{(E_1 + E_2)^2}{M_1 + M_2} - \frac{E_1 M_2 + E_2 M_1}{2E_1 E_2} U^A + \frac{E_1 + E_2}{2E_1 E_2} \mathbf{p} \cdot V^T \mathbf{p} \frac{E_1 + E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \right] \\ &\cdot \left[ (M_1 + M_2) - \frac{E_1 M_2 + E_2 M_1}{2E_1 E_2} U^p + \frac{E_1 - E_2}{2E_1 E_2} \mathbf{p} \cdot V^A \mathbf{p} \frac{E_1 - E_2}{E_1 M_2 + E_2 M_1} \right] \varphi_p = m^2 \varphi_p. \end{aligned} \quad (2.6)$$

这个方程的本征值是介子物理质量的平方.

这个结果中如取  $M_1 = M_2$  正是[1]中给出的结果. 这个结果表明: **如果在质心系有效相互作用可以近似等效为某种球对称对角耦合瞬时相互作用位势,只要这种相互作用可以使层子与反层子结合成  $0^-$  介子束缚态,就自然使介子质量谱按平方规律出现.** 这个结论的导出并不依赖于对位势形状的具体假定. 同时由于质量平方本征值是在三维方程中出现,因此不出现在四维方程中常会遇到的对应于时间自由度激发所带来的严重

表 1  $\lambda_{i\phi}$  的值

$\Gamma_i$	1	$\gamma_5$	$\gamma_\mu$	$i\gamma_\mu\gamma_5$	$\sigma_{\mu\nu}$	$\tau_4$	$\gamma_4\gamma_5$	$\gamma_4\gamma_\mu$	$i\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5$	$\gamma_4\sigma_{\mu\nu}$	有效位势
$U_i$	$U_S$	$U_P$	$U_V$	$U_A$	$U_T$	$V_S$	$V_P$	$V_V$	$V_A$	$V_T$	
$\Gamma_\phi$	1	1	4	4	12	1	1	4	4	12	$V^S$
	$\gamma_5$	1	-4	-4	12	-1	-1	4	4	-12	$U^P$
	$\gamma_4$	1	-2	2	0	1	-1	-2	2	0	$V^V$
	$\gamma$	1	-2	2	0	-1	1	2	-2	0	$U^V$
	$\gamma_4\gamma_5$	1	2	-2	0	-1	1	-2	2	0	$U^A$
	$\gamma\gamma_5$	1	2	-2	0	1	-1	2	-2	0	$V^A$
	$\gamma\gamma_4$	1	0	0	-4	-1	-1	0	0	4	$U^T$
	$\gamma\gamma_4\gamma_5$	1	0	0	-4	1	1	0	0	-4	$V^T$

困难。

在上面的讨论中,除了假定瞬时作用位势外,并没有引入进一步的假定,因此导出的结果可以适用于一般的两个费米子组成的  $S$  态束缚态。例如可以讨论氢原子。

我们看(2.6)式的非相对论极限,假定相互作用  $\langle U \rangle, \langle V \rangle \ll M_1, M_2, \langle \mathbf{p}^2 \rangle \ll M_1^2, M_2^2$ , 令  $m = M_1 + M_2 + E'$  代入,得到:

$$\left[ \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2} (U^P + U^A) \right] \varphi_P = E' \varphi_P, \quad (2.7)$$

其中  $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$  是折合质量。这正是非相对论量子力学中质心系两个粒子的束缚态

定态方程,  $M_1$  和  $M_2$  的贡献可以合起来体现在一个折合质量  $\mu$  中。但是在未作非相对论近似的(2.6)式中,  $M_1$  和  $M_2$  的贡献不能简单合并归结为折合质量,这正是相对论性方程具有的特点。

在(2.7)式中,非相对论有效位势  $U_{\text{非相对论}}$  为:

$$U_{\text{非相对论}} = -\frac{1}{2} (U^P + U^A).$$

利用表1写成十种耦合的明显形式为:

$$U_{\text{非相对论}} = -U_S + U_V + 3U_A - 6U_T + V_S - V_V - 3V_A + 6V_T.$$

可以看到  $\gamma_5$  耦合 ( $U_P$ ) 和  $\gamma_4\gamma_5$  耦合 ( $V_P$ ) 在非相对论极限下没有最低级项贡献。这正是过去熟知的  $\gamma_5$  耦合不能给出非相对论中心位势。从(2.8)式还可看到,按我们规定的符号,各种耦合在非相对论近似下对位势贡献的比例和符号是不同的,只有矢量耦合 ( $U_V$ ) 和静矢量耦合 ( $V_S$ ) 的系数才是 1。这一点在分析位势是吸引力还是排斥力的物理意义时是要注意的。

### 三

为了研究介子质量的“味”分裂,需要对层子的性质和相互作用的性质作进一步的假定。我们假定层子间的相互作用与层子的“味”无关,质量的分裂完全是由于层子“原始”质量不同所造成。

关于位势的形式,既要给出介子较大的空间分布半径(与层子的 Compton 波长比),又要给出介子的质量很轻(与层子质量比),一种可取的考虑是假定位势在坐标原点附近的行为近似为一个深位阱(以抵消重层子的质量)和一个不很大的幂次位势(以给出小的动量分布半径).即假定位势为下列形式:

$$U(r) = A - Br^n, \quad (3.1)$$

并且对于基态和低激发态

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}^2 \rangle &\ll M_i^2, A^2, \\ |\langle Br^n \rangle| &\ll M_i, |A|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

为了能给出束缚态所需的位势形状,  $A$  应与  $nB$  同号,例如对于  $n=2$  (谐振子位势),  $A$  应与  $B$  同号. 但  $A$  的符号需要是正还是负,则取决于是什么耦合,正如上一节最后所给出  $\gamma_4$  耦合时  $A$  取负号对应吸引力,但标量耦合  $A$  取正号对应吸引力.

将(2.6)式对  $\mathbf{p}^2$  和  $Br^n$  作展开,略去它们二次以上的幂次项,得到 Schrödinger 型二阶方程:

$$(\alpha \mathbf{p}^2 + \beta r^n) \varphi_P = [m^2 - (M_1 + M_2 - A^P)(M_1 + M_2 - A^A)] \varphi_P, \quad (3.3)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha = (M_1 + M_2 - A^P) &\left[ \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^2 + M_2^2}{4M_1^2 M_2^2} A^A + \frac{(M_1 + M_2)^2}{4M_1^2 M_2^2} A'^T \right] \\ &+ (M_1 + M_2 - A^A) \left[ \frac{M_1^2 + M_2^2}{4M_1^2 M_2^2} A^P + \frac{(M_1 - M_2)^2}{4M_1^2 M_2^2} A'^A \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\beta = (M_1 + M_2 - A^P) B^A + (M_1 + M_2 - A^A) B^P,$$

其中各  $A, A', B$  来自

$$\begin{aligned} U^P &= A^P - B^P r^n, & U^A &= A^A - B^A r^n, \\ V^A &= A'^A - B'^A r^n, & V^T &= A'^T - B'^T r^n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

这个方程的基态本征值为:

$$m^2 = (M_1 + M_2 - A^P)(M_1 + M_2 - A^A) + C_n \alpha^{\frac{n}{n+2}} \beta^{\frac{2}{n+2}}, \quad (3.6)$$

其中  $C_n$  是一个只与  $n$  有关的无量纲的数(参看附录 I).

在 [1, 2] 中曾讨论从已有物理要求出发对相互作用耦合形式的选取所提供的要求. 在 [3] 中指出在瞬时相互作用只有一种耦合的情况下,  $\gamma_5$  耦合可以给出符合  $SU(6)$  要求的波函数. 在 [4] 中还从不假定瞬时相互作用的普遍讨论中得到层子间有效相互作用可能是  $\gamma_5$  耦合的结果. 此外  $\gamma_4$  耦合的存在并不破坏  $SU(6)$  的要求. 我们着重讨论  $\gamma_5$  耦合 ( $U_P$ ) 和  $\gamma_4$  耦合 ( $V_S$ ) 为主的情形,这时

$$\begin{aligned} U^P &= U_P - V_S, & U^A &= -U_P - V_S, \\ V^A &= -U_P + V_S, & V^T &= U_P + V_S, \end{aligned} \quad (3.7)$$

代入(3.4)式得到:

$$\begin{aligned} \alpha &= (M_1 + M_2 + A'_S) \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}, \\ \beta &= 2A_P B_P - 2(M_1 + M_2 + A'_S) B'_S, \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中  $V_S = A'_S - B'_S r^n$ . 从而得到介子质量公式

$$\begin{aligned}
m^2 &= (M_1 + M_2 + A'_s)^2 - A_p^2 \\
&+ C_n \left[ \frac{(M_1 + M_2 + A'_s)(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} \right]^{\frac{n}{n+2}} |2A_p B_p - 2(M_1 + M_2 \\
&+ A'_s) B'_s|^{\frac{2}{n+2}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

前面已指出, 如果  $V_s$  对应束缚位势则  $A'_s$  应取负号, 这样它与层子质量相加时起抵消质量的作用. 引入层子的“等效质量”  $M'_i = M_i + \frac{1}{2} A'_s (i = 1, 2)$ , 上式变为:

$$\begin{aligned}
m^2 &= (M'_1 + M'_2)^2 - A_p^2 + C_n \left[ \frac{(M'_1 + M'_2)(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} \right]^{\frac{n}{n+2}} |2A_p B_p - 2(M'_1 \\
&+ M'_2) B'_s|^{\frac{2}{n+2}}.
\end{aligned}$$

我们感兴趣的是层子质量很重但等效质量不重的情形, 即  $A'_s$  把层子质量大部分抵消的情形. 假定不同“味”层子质量差比起层子质量来很小, 则质量差的影响主要通过等效质量反映出来, 在原始质量项中层子味质量差带来的影响反映在介子质量差上并不敏感. 这样(3.9)式中最后一项中令  $M_1 \approx M_2 \approx M$  可表为:

$$2C_n M^{-\frac{n}{n+2}} (M'_1 + M'_2)^{\frac{n}{n+2}} |A_p B_p - (M'_1 + M'_2) B'_s|^{\frac{2}{n+2}}. \tag{3.10}$$

下面讨论两种极端的情形:

(1) 幂次位势主要由  $\gamma_4$  耦合贡献, 即  $\left| \frac{A_p B_p}{M'_1 + M'_2} \right| \ll |B'_s|$ , 这时(3.10)变为:

$$2C_n M^{-\frac{n}{n+2}} |B'_s|^{\frac{2}{n+2}} (M'_1 + M'_2) = 2C'_n (M'_1 + M'_2), \tag{3.11}$$

其中  $C'_n = C_n M^{-\frac{n}{n+2}} |B'_s|^{\frac{2}{n+2}}$  为近似与味无关的常量. 这时质量公式(3.9)可改写为:

$$m^2 = (M'_1 + M'_2 + C'_n)^2 - A_p^2 - C_n'^2. \tag{3.12}$$

可以重新定义等效质量为  $M''_i = M'_i + \frac{1}{2} C'_n$ , 引入常数  $C = A_p^2 + C_n'^2$ , 则(3.12)可简写作:

$$m^2 = (M''_1 + M''_2)^2 - C. \tag{3.13}$$

(2) 幂次位势主要由  $\gamma_5$  耦合贡献, 即  $|B'_s| \ll \frac{A_p B_p}{M'_1 + M'_2}$ , 则质量公式(3.9)可化为:

$$m^2 = (M'_1 + M'_2)^2 - A_p^2 + 2C_n (M'_1 + M'_2)^{\frac{n}{n+2}} M^{-\frac{n}{n+2}} |A_p B_p|^{\frac{2}{n+2}}. \tag{3.14}$$

特别是对于谐振子位势  $n = 2$ , 上式变为:

$$m^2 = (M'_1 + M'_2)^2 - A_p^2 + 2C_n \left| \frac{A_p B_p}{M} \right|^{\frac{1}{2}} (M'_1 + M'_2)^{\frac{3}{2}}, \tag{3.15}$$

其中  $C_n = \frac{3}{2}$  (对基态), 对于激发态  $C_n = \left( 2n_r + l + \frac{3}{2} \right)$ .

以上的讨论是对赝标介子进行的. 对于矢量介子的情形, 方程的推导和化简要繁得

多,我们不详细列出过程. 需要指出的是,在对方程作近似展开得到的 Schrödinger 型方程(3.3)中,只要对各有效位势作如下的代换:

$$U^P \rightarrow U^T, U^A \rightarrow U^V, V^T \rightarrow V^S, V^A \rightarrow V^V, \quad (3.16)$$

就得到相应的矢量介子方程. 由于在  $\gamma_5$  耦合与  $\gamma_4$  耦合时:

$$\begin{aligned} U^P &= U^T = -V^A = -V^V = U_P - V_S, \\ U^A &= U^V = -V^T = -V^S = -U_P - V_S, \end{aligned} \quad (3.17)$$

相同味结构的矢量介子与赝标介子的质量将完全简并. 要使它们的质量简并解除,还必须有附加的其它耦合. 一般说来,引入附加的其它耦合可能会改变质量关系(3.9)的形式. 但是如果附加的耦合的选取满足下述条件:

$$\begin{aligned} U_V &\approx U_A, U_S = 2U_T = -V_V = -V_A, \\ U_V &= -V_S = -V_P, U_A = -2V_T, \end{aligned} \quad (3.18)$$

则既能给出自旋分裂又能保持质量公式的原有形式,只不过相当于原公式中  $\gamma_5$  耦合的参量对矢量介子与赝标介子的取值有所差别. 考虑到造成自旋分裂的附加耦合项较小,可假定其主要贡献为常位阱而略去其幂次位势的贡献,则只要把过去质量公式中  $A_r$  换为  $A_J$  以表示其对不同自旋可取不同值,这样(3.12)变为:

$$m^2 = (M'_1 + M'_2 + C'_n)^2 - A_J^2 - C'_n{}^2. \quad (3.19)$$

(3.15) 变为:

$$m^2 = (M'_1 + M'_2)^2 - A_J^2 + 2(2n_r + l + \frac{3}{2}) \left| \frac{B_P}{M} A_J (M'_1 + M'_2) \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

在下一节中我们将用这两个公式来讨论介子质量谱的分裂. 在结束这一节之前我们要强调指出的是这两个公式都不能从一般的对称性破坏的讨论得出. 我们是从特定的模型假定下得出的,它们又和通常非相对论结构模型所得的结果完全不同:(1)在质量关系中介子质量是以平方形式出现,体现了强耦合的特点;(2)有非相对论极限的  $\gamma_4$  耦合和没有非相对论极限(在最低级近似意义下)的  $\gamma_5$  耦合对质量关系的贡献性质上很不一样,  $\gamma_4$  耦合的位阱可以起抵消质量的作用,  $\gamma_5$  耦合的位阱则起抵消质量平方的作用,后者不能和等效质量的概念联系起来. 在从其它具体模型考虑来研究介子的质量关系时,如果不是作非相对论近似处理,上述两个特点还是值得注意的.

#### 四

在研究介子质量关系的工作中,存在两种观点,一种认为介子质量在质量关系中是以一次方的形式出现,一种认为是以平方形式出现. 早在1964年就已注意到,对于介子质量平方存在经验关系.

$$\rho - \pi \approx K^* - K$$

这对于质量平方观点是一个有力的支持,并且显示出在质量平方关系中,自旋分裂项应近似与层子的味无关. 这样质量关系应近似地可一般表为

$$m^2 = D_{ik} - C_J \quad (4.1)$$

$C_J$  为自旋有关“味”无关项,  $D_{ik}$  为“味”有关自旋无关项,脚标  $i, k$  代表组成介子的层子

和反层子的味。这是唯象分析对质量公式给出的启示。

在此基础上可以用对称性破坏的讨论来研究  $D_{ik}$  的性质。不论是在  $SU(3)$  或  $SU(4)$  理论中, 如果考虑对称性的一级破坏(即引入  $T_{33}$  和  $T_{44}$  的一级贡献), 不难证明即相当于  $D_{ik}$  可表为

$$D_{ik} = D_i + D_k \quad (4.2)$$

即  $D_{ik}$  可表为与层子反层子味分别有关的两项线性相加。要提醒的是  $D_i$  代表了一切一级破坏的合效果, 一般说来, 既包括层子质量差的贡献也包括相互作用对称性破坏的效果。

如果引入对称性的高级破坏, 所引入的参数过多, 除非加进物理假定以减少参数的数目, 否则不可能给出有意义的预言。

在把(4.2)式与介子质量进行比较时, 还必须注意到这样给出的介子质量都属于层子和反层子的味确定的态。对于中性介子, 给出的是纯  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$ ,  $c\bar{c}$  态的质量。但实验观察到的却是它们重新组合成的叠加态, 而按照对称性理论给出的“无混合”态也是这些态的叠加态, 例如  $\eta$  介子“无混合”态是  $\frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle)$ , 即在“味”表象中是“混合”态。在对称性理论中, 这样的态的质量相当于按(4.2)式计算出各不同味结构的态的质量按叠加系数平方的权重加起来的的结果, 例如  $m_\eta^2 = \frac{1}{6}(m_{u\bar{u}}^2 + m_{d\bar{d}}^2 + 4m_{s\bar{s}}^2)$ 。但

在结构模型理论中, 要给出这些叠加态就需要引入在上述质量公式中包括不了的质量跃迁矩阵(以  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$ ,  $c\bar{c}$  为基)。引入质量矩阵需要进一步的模型机制考虑并且会带来新的附加参数, 这就使对  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta_c$  和  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $J$  的质量预言很困难。但是由于实验上显示  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $J$  的行为很接近  $SU(4)$  分类的“理想混合”, 即

$$|\omega\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle), |\varphi\rangle \approx |s\bar{s}\rangle, |J\rangle \approx |c\bar{c}\rangle \quad (4.3)$$

这表明在以  $|u\bar{u}\rangle$ ,  $|d\bar{d}\rangle$ ,  $|s\bar{s}\rangle$ ,  $|c\bar{c}\rangle$  为基时质量跃迁矩阵很小。因此在不涉及对混合机制的进一步考虑时, 可以用质量公式讨论的粒子有  $\pi$ ,  $K$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $\rho$ ,  $K^*$ ,  $D^*$ ,  $F^*$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $J$  共十一个质量值。

(4.1)式给出

$$\rho - \pi = K^* - K = D^* - D = F^* - F. \quad (4.4)$$

(4.2)式进一步给出

$$\rho - \omega = 0, \quad (4.5)$$

$$\rho + \varphi - 2K^* = 0, \quad (4.6)$$

$$\rho + J - 2D^* = 0, \quad \varphi + J - 2F^* = 0, \quad (4.7)$$

$$F + \pi - D - K = 0, \quad F^* + \rho - D^* - K^* = 0, \quad (4.8)$$

根据现有实验, (4.4), (4.5), (4.6) 是近似满足的, 这就是过去  $SU(3)$  分类中一级质量公式受到重视的原因。但是有粲粒子参加的(4.7)和(4.8)式并不符合实验, 不仅  $J$  与  $D^*$ ,  $F^*$  之间, 并且  $D^*$  与  $F^*$  之间都不符合预言的要求。这个矛盾说明, 需要从具体模型考虑出发, 导出包含有相当于对称性高级破坏而又不带来过多附加参数的质量公式。上节导



出的(3.19)和(3.20)是符合这个要求的。我们先讨论(3.19),在不讨论激发态时可以利用(3.13)的形式

$$m^2 = (M_1'' + M_2'')^2 - C_J, \quad (4.9)$$

它对位势具体形式不敏感和需要输入的待定参数少(只有  $M_u'' = M_d'', M_s'', M_c'', C_0, C_1$  共5个)是其两个优点。我们以  $\pi, K, D, K^*, J$  的质量为输入,计算结果与实验的比较见表2。

由(4.9)可以直接导出(4.4)和(4.5),但(4.6), (4.7)和(4.8)则不再保持。例如代替(4.8),现在有

$$\begin{aligned} F + \pi - D - K &= F^* + \rho - D^* - K^* \\ &= 2(M_s'' - M_u'')(M_c'' - M_u'') \end{aligned} \quad (4.10)$$

由于现在没有考虑电磁质量差,预言介子质量的准确程度不可能到电磁质量的量级。从表2可以看到,计算值与实验值的差超过电磁质量差量级( $\sim 10\text{MeV}$ )的只有  $\omega, F, F^*$ 。 $\omega$  的质量是由(4.5)式所决定,  $F$  与  $F^*$  的偏离也分别只有一个和半个标准误差。考虑到这些因素,上述结果与实验符合是较好的,特别是一级质量公式(4.1)所遇到的困难都可以得到克服。

表2 介子的质量

粒 子	计 算 值 GeV	实 验 值 GeV	参 数 值
$\pi$	输 入	0.1380	$M_u'' = 0.6006\text{GeV}$
K	输 入	0.4957	$M_s'' = 0.6915\text{GeV}$
D	输 入	1.870	$M_c'' = 1.6177\text{GeV}$
F	1.977	$2.03 \pm 0.06$	$C_0 = 1.4237\text{GeV}^2$
$\rho$	0.757	0.766	$C_1 = 0.8698\text{GeV}^2$
$K^*$	输 入	0.8942	
$D^*$	2.013	$2.007 \pm 0.005$	
$F^*$	2.112	$2.14 \pm 0.06$	
$\omega$	0.757	0.7827	
$\phi$	1.021	1.0197	
J	输 入	$3.098 \pm 0.003$	

## 五

强子的质量谱显示很好的 Regge 线性关系,这显示层子间有效相互作用可能近似为谐振子型。我们把谐振子位势下导出的(3.20)改写为

$$m^2 = (M_1' + M_2')^2 - A_J^2 + \left(2n_r + l + \frac{3}{2}\right) \omega_\rho \left| \frac{A_J (M_1' + M_2')}{A_1 2M_u'} \right|^{1/2} \quad (5.1)$$

来进行讨论。由于(5.1)中没有考虑  $l \neq 0$  下不同自旋态分裂的相互作用,我们将主要用(5.1)来讨论  $l = 0$  的质量谱,其中包括  $n_r \neq 0$  的径向激发态。

(5.1)中共出现六个参量:  $M_u' = M_d', M_s', M_c', A_0, A_1, \omega_\rho$ 。我们以基态的  $\pi, \rho, \phi, J$  和第一径向激发态  $\rho', \phi$  作为输入,这样所有不是“味”中性的态如  $K, K^*, D, D^*$ ,

F, F\* 都可以预言. 计算结果与实验的比较见表 3.

表 3 介子基态和第一径向激发态质量

基 态	计算值 GeV	实验值 GeV	激发态	计算值 GeV	输 入 参 数
$\pi$	输 入	0.1380	$\pi'$	1.492	$M'_u = 0.3540 \text{ GeV}$
K	0.500	0.4957	$K'$	1.609	$M'_s = 0.4417 \text{ GeV}$
D	1.901	1.870	$D'$	2.665	$M'_c = 1.4162 \text{ GeV}$
F	1.999	$2.03 \pm 0.06$	$F'$	2.751	$A_0 = 1.4620 \text{ GeV}$
$\rho$	输 入	0.7659	$\rho'$	1.600 输入	$A_1 = 1.1854 \text{ GeV}$
$K^*$	0.899	0.8942	$K^{*'}$	1.707	$2\omega_\rho = \omega_\tau$
$D^*$	2.021	$2.007 \pm 0.005$	$D^{*'}$	2.688	$= 1.9871 \text{ GeV}^2$
$F^*$	2.112	$2.14 \pm 0.06$	$F^{*'}$	2.771	
$\omega$	0.766	0.7827	$\omega'$	1.604	
$\varphi$	输 入	1.0197	$\varphi'$	1.805	
J	输 入	$3.098 \pm 0.003$	$\psi$	3.684 输入	

对于所得结果, 可作如下讨论:

(1) 尽管(5.1)式中出现六个参数, 但在表 3 中基态只用了四个质量值作输入, 比表 2 中采用的还少一个, 所得结果比表 2 还要符合得好. (5.1) 式对径向激发态质量也有预言, 这些态中除  $\rho'$  和  $\psi$  外,  $\omega'$ ,  $\varphi'$  在实验上有所报导, 其质量也接近预言值, 但其辨认还未最后确定. 今后实验上辨认出新的介子径向激发态将对(5.1)提供检验.

(2) (5.1)式给出, 由于  $M'_u = M'_d < M'_s < M'_c$  导致

$$\rho - \pi > K^* - K > D^* - D > F^* - F \quad (5.2)$$

实验上确实显现出它们之间是递减的, 表明自旋分裂不是完全“味”无关的. (5.1) 式给这个事实以结构模型的解释并且给出与实验比较符合的定量结果.

(3) 值得注意的是定出的 u 层子和 s 层子的有效质量很接近过去非相对论夸克模型中利用重子磁矩定出的层子有效质量值. 如果利用表 3 中给出的层子的有效质量值来估算重子的磁矩得到

$$\mu_p = 2.65 \frac{e}{2m_p}, \quad \mu_n = -1.77 \frac{e}{2m_p}, \quad \mu_\Lambda = -0.71 \frac{e}{2m_p}.$$

与实验是相当接近的. 这个事实表明, 很可能层子在重子中的有效质量与在介子中的有效质量接近相同. 这对进一步研究重子的结构问题是有启发意义的.

(4) 最近实验上发现的新的重粒子  $\Upsilon^{[5]}$  如果是第五种层子 b 和反层子  $\bar{b}$  的  $1^-$  束缚态, 也可以用(5.1)进行讨论. 以  $m_\Upsilon = 9.44 \text{ GeV}$  作输入, 定出  $M'_b = 4.6136 \text{ GeV}$ , 由此预言  $\Upsilon$  的两个最低径向激发态质量为

$$m_{\Upsilon'} = 9.81 \text{ GeV}, \quad m_{\Upsilon''} = 10.17 \text{ GeV},$$

新层子 b 与 u, d, s, c 也可组成介子, 按照(5.1)预言它们的质量如表 4. 值得注意的是, 随着介子质量的增加, 相同味结构的矢量介子与赝标介子的质量差不断减少, 这个现象在(5.2)中已讨论过, 现在变得更加明显. 从 F 粒子开始  $1^- - 0^-$  分裂已小于  $\pi$  介子质量, 这就决定了比  $F^*$  重的非味中性的基态矢量介子 (如  $(u\bar{b}), (s\bar{b}), (c\bar{b})$  等) 都不能作强衰变, 它们的主要衰变方式将为辐射衰变. 按表 4 预言含 b 层子的介子  $1^- - 0^-$  质量差

表4 有b数介子质量(GeV)

	$m_{1^-}$	$m_{0^-}$	$m_{1^-} - m_{0^-}$
$(u\bar{b}), (b\bar{u})$ $(d\bar{b}), (b\bar{d})$	5.217	5.189	0.028
$(s\bar{b}), (b\bar{s})$	5.304	5.276	0.028
$(c\bar{b}), (b\bar{c})$	6.269	6.249	0.020
纯 $(b\bar{b})$	9.440	9.433	0.007

只有不到 30MeV, 它们辐射衰变的相空间很小, 这就决定了它们的衰变宽度应很小. 至于含 b 层子的  $0^-$  介子, 则只能作弱衰变. 因此如果  $\gamma$  是  $b\bar{b}$  的  $1^-$  束缚态, (5.1)式预言将存在一批质量为表4给出的弱衰变赝标介子和电磁衰变矢量粒子. 当然  $(b\bar{b})$  态可以通过 Zweig 规则破坏的强作用衰变, 但也应表现为窄宽度粒子.

### 附录 I Schrödinger 型方程的一些讨论

我们对幂次势 Schrödinger 型方程

$$(\alpha \mathbf{p}^2 + \beta r^n) \varphi = \lambda \varphi \quad (I.1)$$

进行一些讨论. 如所熟知 (I.1) 有束缚态解的条件是:

$$n > 0, \beta > 0 \text{ 或 } -2 < n < 0, \beta < 0. \quad (I.2)$$

故(I.1)可化为

$$\left( \alpha \mathbf{p}^2 + \frac{n}{|n|} |\beta| r^n \right) \varphi = \lambda \varphi.$$

引入变换

$$\mathbf{r} = \left( \frac{\alpha}{|\beta|} \right)^{\frac{1}{n+2}} \mathbf{r}', \quad (I.3)$$

则方程可化为

$$\left( \mathbf{p}'^2 + \frac{n}{|n|} r'^n \right) \varphi = \lambda' \varphi, \quad (I.4)$$

其中  $\mathbf{p}'$  为对应  $\mathbf{r}'$  的动量算符,  $\lambda' = \lambda \alpha^{-\frac{n}{n+2}} |\beta|^{-\frac{2}{n+2}}$  为 (I.4) 式的本征值.  $\lambda'$  与  $n$  同号且

只是  $n$  的函数, 故可写作  $\lambda' = C_n = \frac{n}{|n|} |C_n|$ .

由此得到 (I.1) 的本征值为

$$\lambda = C_n \alpha^{\frac{n}{n+2}} |\beta|^{\frac{2}{n+2}}. \quad (I.5)$$

量子力学中普遍证明了对 (I.1) 相应有

$$2\alpha \langle \mathbf{p}^2 \rangle = n\beta \langle r^n \rangle \quad (I.6)$$

由此得到本征值  $\lambda$  又可表为

$$\lambda = \alpha \langle \mathbf{p}^2 \rangle + \beta \langle r^n \rangle = \frac{n+2}{n} \alpha \langle \mathbf{p}^2 \rangle, \quad (I.7)$$

它把  $\lambda$  和介子的动量分布半径联系起来。

在一般满足 (I.2) 要求的  $n$  值下 (I.4) 求解是比较困难的。对于  $n = 2$  和  $-1$  的两种情形, 已熟知

$$C_2 = \left(2n_r + l + \frac{3}{2}\right), \quad C_{-1} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(\eta_r + l + 1)2}.$$

**附录 II 关于中性介子混合问题**

在 Bethe-Salpeter 方程中解出的纯中性介子态为  $|u\bar{u}\rangle, |d\bar{d}\rangle, |s\bar{s}\rangle, |c\bar{c}\rangle$ 。由于它们都具有相同的量子数, 可以有这些态之间的直接顶点, 如图 1 所示。这些直接顶点可使物理上实际观察到的态是它们之间的重新混合。以混合前的这四个态为基, 由 Bethe-Salpeter 方程解出的质量公式给出的质量平方为  $m_{u\bar{u}}^2, m_{d\bar{d}}^2, m_{s\bar{s}}^2, m_{c\bar{c}}^2$ , 质量(平方)跃迁矩阵为  $\Lambda_{ik}(i, k = u, d, s, c)$ , 则混合后的物理态及其质量可由质量(平方)矩阵的本征值方程求解给出。质量(平方)矩阵为

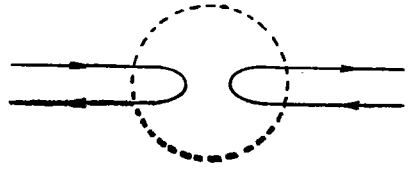


图 1

$$\begin{pmatrix} m_{u\bar{u}}^2 + \Lambda_{uu} & \Lambda_{ud} & \Lambda_{us} & \Lambda_{uc} \\ \Lambda_{du} & m_{d\bar{d}}^2 + \Lambda_{dd} & \Lambda_{ds} & \Lambda_{dc} \\ \Lambda_{su} & \Lambda_{sd} & m_{s\bar{s}}^2 + \Lambda_{ss} & \Lambda_{sc} \\ \Lambda_{cu} & \Lambda_{cd} & \Lambda_{cs} & m_{c\bar{c}}^2 + \Lambda_{cc} \end{pmatrix}.$$

同位旋守恒要求在强作用质量分裂量级下,  $m_{u\bar{u}} = m_{d\bar{d}}, \Lambda_{uu} = \Lambda_{dd}, \Lambda_{us} = \Lambda_{ds}, \Lambda_{uc} = \Lambda_{dc}$ 。但这样  $\Lambda$  矩阵中的独立参数仍过多以致在混合后对质量实际上给不出预言。这就是在用一般导出的质量公式讨论质量混合时所遇到的困难。

为了减少参数, 很自然的设想是唯一假定  $\Lambda_{ik} = \Lambda$  是同一值, 即  $\Lambda$  是  $SU(4)$  对称的。然而这样作的结果不能解释中性介子的衰变行为, 这表明质量混合问题的机制需要作进一步的研究。

对于矢量介子, 从  $\rho^0, \omega, \varphi, J$  的衰变行为来看, 接近于“理想”混合。这表明对于矢量介子来说  $\Lambda$  矩阵很小, 而  $\rho^0$  与  $\omega$  的大混合是由于  $u$  与  $d$  的简并即同位旋不变性所导致。如果略去  $\Lambda$  矩阵带来的很小的修正, 则可以用上面所导出的质量关系来讨论中性矢量介子的质量。

对于赝标介子,  $\eta, \eta', \eta_c$  的质量和衰变行为都明显偏离通常称为“理想混合”的情形, 因此  $\Lambda$  矩阵就不能忽略了, 这就使我们不能用上面的质量公式讨论它们的质量。由质量矩阵求迹给出

$$\pi + \eta + \eta' + \eta_c - m_{u\bar{u}}^2 - m_{d\bar{d}}^2 - m_{s\bar{s}}^2 - m_{c\bar{c}}^2 = \Lambda_{uu} + \Lambda_{dd} + \Lambda_{ss} + \Lambda_{cc}$$

利用这个关系可以估计  $\Lambda$  矩阵的迹值。利用表 2 和表 3 给出的参数值代入, 给出其值如下表。

输入 $m_{\eta_c}(\text{GeV})$	2.75	2.80	2.85
表 2 给出 $(\text{GeV}^2)$	-0.771	-0.494	-0.211
表 3 给出 $(\text{GeV}^2)$	-0.925	-0.647	-0.365

纯( $c\bar{c}$ )赝标介子的质量按表2参数给出为3.007GeV,按表3参数给出为3.032GeV. 它们都远大于 $\eta_c$ 的实验观察值 $\sim 2.85$ GeV. 有些人从 $\eta_c$ 的某些性质倾向认为它是纯( $c\bar{c}$ )态,但实际上 $\eta_c$ 的性质实验上研究得还很少,据现有实验还远不足以判定 $\eta_c$ 是否是接近纯( $c\bar{c}$ )态,还需要作进一步的研究和分析.

### 参 考 文 献

- [1] 北京大学物理系基本粒子理论组, 物理学报, **25** (1976), 316.
- [2] 北京大学物理系基本粒子理论组, 物理学报, **25**(1976), 415.
- [3] 胡宁, 物理学报, **25**(1976), 494.
- [4] 朱重远、安瑛, 高能物理与核物理, **1**(1977), 47.
- [5] S. W. Herb et al., *Phys. Rev. Letters*, **39** (1977), 252.

## BETHE-SALPETER EQUATION FOR STRATON AND ANTISTRATON WITH DIFFERENT MASSES AND $SU(4)$ MASS RELATIONS FOR MESONS

GAO CHONG-SHOU  
(*Peking University*)

### ABSTRACT

In this paper, the theory of mesonic Bethe-Salpeter equation with instantaneous interaction is generalized to the case where the mass of the straton is not equal to that of the antistraton. Assuming that the stratons are heavy and the interaction is dominantly a pseudoscalar potential and a static vector potential, we derive the  $SU(4)$  mass splitting for mesons. The difficulties encountered by the first order  $SU(4)$  mass relations after the discovery of charmed particles are analyzed. It is pointed out that these difficulties disappear in our mass relations. In particular, the mass formula obtained with the potential of harmonic oscillator may explain not only the masses of both ground states and radial excited states, but also the effective masses of stratons, while the latter is compatible with the mass values for explaining the magnetic moments of baryons. Finally, we discuss the newly discovered heavy particle  $Y$  using our mass relations.