第2卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 6
1978年11月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS November, 1978

非阿贝尔规范势分解的几何表述

段一士 葛墨林
(兰州大学)

摘要

从无挠嘉当几何的观点出发讨论了非阿贝尔规范势的分解. 借助 γ-矩阵和洛仑兹群生成元的对易关系,得到相应的"同位旋空间"的规范势的表达式.

在工作[1]中通过 SU_2 规范势的分解并与基本场结合起来得到了规范场对偶荷与同位旋空间拓扑性质的联系,其后通过同位旋矢量函数 $\phi^a(x)$ ($a=1, 2, 3$) 将自然守恒流用 δ-函数的形式表达出来[2],证明多个经典磁单极体系的运动轨道均对应同位旋空间的原点 $\phi^a=0$. 但从几何角度,用 Cartan 活动标架来描述 SU_2 规范势是很方便的[3,4],而如利用 $\boldsymbol{\phi}(x)=\phi(x)\mathbf{n}(x)$ (矢号表示同位旋矢量)代替原来的同位旋单位矢 $\mathbf{n}(x)$ 之后,可以毫无困难地将结构方程推广到同位旋空间而又保证外微分等运算形式不变,这点从 Cartan 原始理论[5]以及微分几何来看几乎是显然的.

过去讨论空间几何性质,特别是在引入黎曼几何时,通常是引入包含挠率矩阵和曲率矩阵的两组结构方程,例如[6]中所述. 由引进联络的公理化方法出发,我们同样可以引入在更广泛的一类内空间成立的两组结构方程,它事实上属于 Cartan 几何,形式上也有类似挠率矩阵与曲率矩阵的两类协变形式的发甫式,可以称它们为广义挠率矩阵(以下用 T 表示)与广义曲率矩阵(以下用 F 表示). 在附加一定限制条件时,此中定义的 F 与[6]中的曲率矩阵本质上没有什么不同. 但在这个几何中,我们并不由标架出发,而是首先定义与"平移"有关的发甫式以及与"转动"有关的发甫式,它们仍为1-形式,一经给定,就决定了 T 和 F,至于这两种发甫式给定的原则主要是出于物理的考虑.

例如对黎曼几何而言,上述两个发甫式分别由四脚标架 $\lambda_{\mu(\alpha)}$ ("半度规")和带有一个黎曼指标的李西旋度系数 $\eta_{\mu(\beta\gamma)}$ 构成,应用限制条件 $T=0$ 与 $\lambda_{\mu(\alpha)}$ 的协变微商为零,便导致了对称下标的第二类克氏符号用度规的表达式或李西旋度系数 $\eta_{(\alpha\beta\gamma)}$ 用四脚标架的表达式,这在广义相对论中是熟知的. 既然如此,将这个办法应用于其它内空间例如同位旋空间会有什么结果呢? 本文就是将上述观念应用于局域性内空间,例如 SU_2 同位旋空间与内洛仑兹空间,结果表明利用此一统一的几何描述可以将规范势合理地分解为更基本的"场". 从这些讨论中还将看到 't Hooft 所定义的 Higgs 场(本文记号用 $\mathbf{n}(x)$,且模为1)是对抽象同位旋空间几何描述的重要环节.

以下我们首先列出结构方程的一些公式,它们在微分几何上是熟知的,然后选择适当

本文1978年2月27日收到.

的例外代数[7]具体表示出 T，最后利用无挠条件 $T=0$ 求出 SU_2 群和洛仑兹群规范势的分解式.

考虑以下两个1-形式发甫式矩阵:

$$\omega(x)=\omega_\mu(x)dx^\mu=\chi_\mu^{(a)}(x)E_{(a)}dx^\mu, \tag{1}$$

$$\Omega(x)=\Omega_\mu(x)dx^\mu=\Gamma_\mu^{(A)}(x)I_{(A)}dx^\mu, \tag{2}$$

式中 (a)、(A) 表示广义群指标. 与它们相联系的 T 和 F 为[8]:

$$\frac{1}{2}T=d\omega-[\Omega\omega], \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}F=d\Omega-[\Omega\Omega], \tag{4}$$

T 与 F 均为协变量,式中 d 表示外微分,方括号表示外积:

$$[\Omega\Omega]=[\Omega_\mu(x),\ \Omega_\nu(x)]_-[dx^\mu\delta x^\nu], \tag{5}$$

$$[\Omega\omega]=\frac{1}{2}\{[\Omega_\mu(x),\ \omega_\nu(x)]_--[\Omega_\nu(x),\ \omega_\mu(x)]_-\}[dx^\mu\delta x^\nu]. \tag{6}$$

将(1)、(2)代入(3)与(4)便得到一种几何，当然要看(1)、(2)如何选择,而这种选择只能从物理上考虑，换句话说我们感兴趣的仅是那些可以和目前已知的物理结果相应的那些 $\omega(x)$ 与 $\Omega(x)$ 的具体形式. 对规范群来说,象用四脚标架 $\lambda_{\mu(\alpha)}$ 讨论广义相对论时那样,不必要求 $E_{(a)}$ 与 $I_{(A)}$ 同属于同一个群，亦即一般地说，当(2)中的 $I_{(A)}$ 为李群 G 的生成元时，$E_{(a)}$ 可以不必属于群 G，但以 $E_{(a)}$ 为基的代数应组成 $I_{(A)}$ 的例外代数[7]:

$$\begin{aligned}&[I_{(A)},\ I_{(B)}]_-=C_{AB}^F I_{(F)},\\&[E_{(a)},\ E_{(b)}]_-=D_{ab}^B I_{(B)},\\&[I_{(A)},\ E_{(a)}]_-=G_{Aa}^b E_{(b)}.\end{aligned} \tag{7}$$

将(1),(2),(5),(6),(7)诸式代入(3),(4)中,且注意:

$$T=T_{\mu\nu}^{(a)}E_{(a)}[dx^\mu\delta x^\nu], \tag{8}$$

$$F=F_{\mu\nu}^{(A)}I_{(A)}[dx^\mu\delta x^\nu]. \tag{9}$$

则有

$$T_{\mu\nu}^{(a)}=\partial_\mu\chi_\nu^{(a)}-\partial_\nu\chi_\mu^{(a)}-G_{Ab}^a(\Gamma_\mu^{(A)}\chi_\nu^{(b)}-\Gamma_\nu^{(A)}\chi_\mu^{(b)}), \tag{10}$$

$$F_{\mu\nu}^{(a)}=\partial_\mu\Gamma_\nu^{(A)}-\partial_\nu\Gamma_\mu^{(A)}-C_{BC}^A\Gamma_\mu^{(B)}\Gamma_\nu^{(C)}, \tag{11}$$

式中 ∂_μ 为普通微商符号. 当讨论“无挠”几何时有

$$T_{\mu\nu}^{(a)}=0, \tag{12}$$

遂有

$$\partial_\mu\chi_\nu^{(a)}-\partial_\nu\chi_\mu^{(a)}-G_{Ab}^a(\Gamma_\mu^{(A)}\chi_\nu^{(b)}-\Gamma_\nu^{(A)}\chi_\mu^{(b)})=0. \tag{13}$$

上式给出了“联络”$\Gamma_\mu^{(A)}$ 与 $\chi_\nu^{(a)}$ 之间的关系. 如所熟知，在用 $\lambda_{\mu(\alpha)}$ 表示的广义相对论中应令

$$\chi_\mu^{(a)}=\lambda_{\mu(a)},\quad \Gamma_\mu^{(A)}=\eta_{\mu(\beta\gamma)}. \tag{14}$$

如(7)式所示的例外代数为 $E_a=\gamma_\alpha$ 即为通常的 Dirac 矩阵,规范群为 $I_{(A)}=I_{(\beta\gamma)}$. 为洛仑兹群的生成元. 如将(14)代入(13)便给出了第二类克氏符号下标对称的条件 $\Gamma_{\tau\sigma}^\rho=\Gamma_{\sigma\tau}^\rho$,并可以解得 $\eta_{(\alpha\beta\gamma)}$ 与 $\lambda_{\mu(\alpha)}$ 以及 $\lambda_{\mu(\alpha)}$ 微商的关系. 与这些熟知的结果相应,我们讨论群 G 为

某种"同位旋空间"的情况.

此时并不象广义相对论那样必须与真实时空度规发生联系,因此出发点应仅是 $T=0$, 并应从物理要求出发给定 (1) 与 (2) 的具体含义.

1. 群 G 为 SU_2 情况

引入基本场 $\boldsymbol{\phi}(x)$，其单位矢为 $\mathbf{n}(x)=\boldsymbol{\phi}(x)/\phi(x)$，矢号表同位旋矢量，设 $I_{(a)}$ 为 SU_2 生成元，此时因结构常数为三阶全反对称张量 ϵ_{abc}，易知此时例外代数就是 $I_{(a)}$ 本身*. 引入

$$\Gamma_\mu^{(A)}=ew_\mu^{(a)}\quad(a=1,2,3), \tag{15}$$

$$\chi_\mu^{(a)}=\partial_\mu n^{(a)}, \tag{16}$$

于是 (12) 变为

$$\epsilon_{abc}(\partial_\mu n^{(b)}w_\nu^{(c)}-\partial_\nu n^{(b)}w_\mu^{(c)})=0,$$

即

$$\partial_\mu\mathbf{n}\times\mathbf{w}_\nu=\partial_\nu\mathbf{n}\times\mathbf{w}_\mu. \tag{17}$$

由于 $\mathbf{w}_\mu$ 可分解成 $\mathbf{n}$ 方向与垂直于 $\mathbf{n}$ 方向两部分,由 (17) 分别取矢积与标积有

$$(\mathbf{w}_\mu\cdot\mathbf{n})\partial_\nu\mathbf{n}=(\mathbf{w}_\nu\cdot\mathbf{n})\partial_\mu\mathbf{n}, \tag{18}$$

$$(\mathbf{n}\times\partial_\mu\mathbf{n})\cdot\mathbf{w}_\nu=(\mathbf{n}\times\partial_\nu\mathbf{n})\cdot\mathbf{w}_\mu. \tag{19}$$

我们所感兴趣的是当 $\mu\neq\nu$ 时 $\partial_\mu\mathbf{n}$ 与 $\partial_\nu\mathbf{n}$ 在同位旋空间具有不同方向的情况，此时有 $\mathbf{w}_\mu\cdot\mathbf{n}=0$, 亦即无挠条件相当于"横规范". 并且从 (19) 可以得到如下形式的解

$$\mathbf{w}_\mu(x)=h(x)(\partial_\mu\mathbf{n}(x)\times\mathbf{n}(x))=h(x)\partial_\mu\boldsymbol{\phi}(x)\times\boldsymbol{\phi}(x)/\phi^2(x), \tag{20}$$

$h(x)$ 可为 x 的任意函数. 当取狭义球同步时 $\boldsymbol{\phi}=\mathbf{r}$, $h=\dfrac{1}{e}$ 即回到通常的形式.

2. 群 G 为洛仑兹群情况

此时 $I_{(A)}=I_{(\beta\gamma)}$ 为通常洛仑兹群生成元，$E_{(a)}=\gamma_\alpha$ 为 Dirac 矩阵 ($a=1, 2, 3, 4$). 引入

$$\Gamma_\mu^{(A)}=ew_\mu^{(\alpha\beta)},\quad \chi_\mu^{(a)}=\partial_\mu n^{(\alpha)}\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \tag{21}$$

则由

$$[\gamma_\alpha, I_{\beta\gamma}]_-=\delta_{\alpha\beta}\gamma_\gamma-\delta_{\alpha\gamma}\gamma_\beta, \tag{22}$$

此时由 (13) 有

$$w_\mu^{(\alpha\beta)}\partial_\nu n^{(\beta)}-w_\nu^{(\alpha\beta)}\partial_\mu n^{(\beta)}=0, \tag{23}$$

由

$$\partial_\nu n^\alpha=(\phi^2\delta^{\alpha\beta}-\phi^\alpha\phi^\beta)\partial_\nu\phi^\beta/\phi^3, \tag{24}$$

可知有解

$$w_\mu^{(\alpha\beta)}(x)=f(x)(\phi^\alpha(x)\partial_\mu\phi^\beta(x)-\phi^\beta(x)\partial_\mu\phi^\alpha(x)), \tag{25}$$

$f(x)$ 可为任意函数. 上式当 $\alpha=1, 2, 3$ 时,令 $w_\mu^a=\dfrac{1}{2}\epsilon_{abc}w_\mu^{(bc)}$, 则回到 SU_2 的结果. 当 ϕ^β 与四维时空坐标狭义同步时形式上回到 [9] 的结果. 还应指出,在以上讨论中 x 流形

---

* 反符号的矩阵不给出新结果,而 $I(a)$ 与 $I(a)\gamma_5$ 组成通常的手征代数.

也可以允许是欧氏空间.

由以上讨论可以看到,从一个统一的几何框架出发,采用例外代数方法,将非阿贝尔规范势分解的过程与黎曼空间中将联络用度规(或"半度规")分解的过程是很相似的,只不过(1)、(2)中定义的两个发甫式的物理对象不同而已.因此,一些规范势可以由更基本的"场"来分解因之具有内部结构这点,同克氏符号可用度规表示这一事实非但是一种类比,通过以上一个统一的几何框架的讨论看得甚至很明显.因此,在这个意义上说,对于某些规范群,找到它的例外代数或许对规范场理论结构的探讨会有进一步的促进.

感谢冼鼎昌和谷超豪同志的有益讨论.

参 考 资 料

[1] 侯伯宇、段一士、葛墨林,兰州大学学报(自然科学版), 1975, **2**, 26.
[2] 段一士、葛墨林,科学通报, **21** (1976), 282.
[3] 段一士、葛墨林,兰州大学学报(自然科学版), 1977, **1**, 33.
[4] 侯伯宇,物理学报, **26** (1977), 83.
[5] 嘉当,《黎曼几何学》,姜立夫等译(科学出版社, 1964).
[6] 谷超豪,《齐性空间微分几何学》(上海科学技术出版社, 1965).
[7] 万哲先,《李代数》(科学出版社, 1964).
[8] P. M. Cohn, "Lie Groups" (1957).
[9] 冼鼎昌、李华钟、郭硕鸿,中山大学学报(自然科学版), 1977, **2**, 47.

GEOMETRICAL DESCRIPTION OF DECOMPOSIBILITY OF A NON-ABELIAN GAUGE POTENTIAL

TUAN I-SHIH KEH MO-LIN
(*Lanchow University*)

ABSTRACT

The decomposibility of a non-abelian gauge potential is discussed from the point of view of the Cartan geometry with zero-torson. By means of the commutation relation between the γ-matrices and the generators of the Lorentz group, we obtain the expression of gauge potential for the related "isotopic space".