

# 关于相对论量子力学中某些 相角不定性的消除

戴显熹 倪光炯

(复旦大学)

## 摘 要

在量子力学的某些问题中,常常存在相角的不定性。最近在研究不动的电中性磁荷与荷电 Dirac 粒子的散射问题中,风间洋一、杨振宁和 Goldhaber<sup>[2]</sup> 为了消除相角不定性,引入了附加磁矩。本文不引入附加磁矩,而利用文章<sup>[3]</sup>中所建议的调整的量子力学框架、正交判据和能量的变分原则(不定相角作为变分参数)唯一地确定了相角、散射截面和束缚态。由于结果与[2]的一致,使这些定解原则受到一次检验。利用这些定解原则,解决了荷电磁荷与荷电 Dirac 粒子及正负磁荷对偶的散射态和束缚态等问题。

## 一、引 言

在某些量子力学问题中,常存在着相角不定性的问题:例如正负磁荷所组成的相对论体系,在  $j < 34.5$  的情况<sup>[1]</sup>,带电磁荷与荷电粒子的相对论散射态与束缚态问题等。最近, Kazama、Yang 和 Goldhaber<sup>[2]</sup> 研究了不动的电中性磁荷与荷电 Dirac 粒子的散射问题,发现最小角动量的态 (type III) 也存在着相角  $\delta$  的不定性问题。他们为了避免这个不定性,在哈密顿算符中引入一项附加的反常磁矩的作用能,然后在定态解中令反常磁矩趋于零,最后确定了相角。本文的目的之一,是不用附加反常磁矩,而用[3]中建议的调整的量子力学框架,利用正交判据和能量对不定参数变分的原则,唯一地确定了相角和散射截面。由于结果与[2]的一致,使正交-变分原则得到一次考验。这个定解原则也可以用来解荷电磁荷与荷电 Dirac 粒子或正负磁荷的散射态与束缚态的问题。

## 二、正交归一判据

为了将[3]中建议的框架推广到同时含磁荷与电荷的 Dirac 方程情况,必须首先推广正交判据。当然,两个态彼此正交的原始定义是:

$$\int \phi_a^\dagger \phi_b d\tau = 0, \quad (2.1)$$

因为一般两函数的内积的严格计算往往是很复杂的,特别是那些具有本性奇点的态和势能具有第一类间断点的情况.因此希望获得通过波函数的渐近行为来判定两函数是否正交的判据,正如[1]、[3]中所作的那样.

现在我们从下列不动的荷电磁荷的场中,荷电为  $ze$  的 Dirac 粒子的相对论哈密顿算符出发:

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (c\mathbf{p} - ze\mathbf{A}) + \beta Mc^2 + U(r) \quad (2.2)$$

其中  $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\beta$  为 Dirac 矩阵,  $\mathbf{A}$  为磁荷的有奇性的矢势. [2] 已经详细研究了定态波函数的角度部分,并把波函数分为 I、II、III 三类.

对 I 类波函数,  $j \geq |q| + 1/2$ ,  $i$  为总角动量量子数,  $q = zeg/\hbar c$ ,  $g$  为磁荷强度,

$$\psi_{jm}^{(1)} = \begin{bmatrix} f(r)\xi_{jm}^{(1)} \\ g(r)\xi_{jm}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

其中  $\xi_{jm}^{(1)}$ 、 $\xi_{jm}^{(2)}$  均为磁荷球谐函数  $Y_{qlm}(\theta, \varphi)$  的线性组合(见[2]). 假设  $\psi_1$ 、 $\psi_2$  为  $\hat{H}$  的两个本征态(属于 I 类):

$$\hat{H}\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda \quad (\lambda = 1, 2) \quad (2.4)$$

考虑到  $r = 0, \infty$  为态的奇点,计算下列积分:

$$\begin{aligned} & \int_{r_0 < r < R} \psi_1^\dagger \hat{H} \psi_2 d\tau - \int_{r_0 < r < R} (\hat{H} \psi_1)^\dagger \psi_2 d\tau = (E_2 - E_1) \int_{r_0 < r < R} \psi_1^\dagger \psi_2 d\tau \\ & = \int_{r_0 < r < R} \psi_1^\dagger (c\mathbf{p} - ze\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \psi_2 d\tau - \int_{r_0 < r < R} [(c\mathbf{p} - ze\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \psi_1]^\dagger \psi_2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.5)$$

利用[2]中证明的引理1,可得:

$$\begin{aligned} & (E_2 - E_1) \int_{r_0 < r < R} \psi_1^\dagger \psi_2 d\tau \\ & = i\hbar c \int_{r_0}^R r^2 dr \left\{ f_1^*(r) \left[ \frac{1}{r} + \partial_r \right] g_2(r) + g_2(r) \left( \partial_r + \frac{1}{r} \right) f_1^*(r) \right. \\ & \quad \left. + g_1^*(r) \left( \partial_r + \frac{1}{r} \right) f_2(r) + f_2(r) \left( \partial_r + \frac{1}{r} \right) g_1^*(r) \right\} \\ & = i\hbar c \left\{ F_1^*(r) G_2(r) + G_1^*(r) F_2(r) \right\} \Big|_{r_0}^R, \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中

$$F(r) = rf(r), G(r) = rg(r). \quad (2.7)$$

令  $r_0 \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ , 则正交-归一条件归结为:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r_0 \rightarrow 0}} \frac{i\hbar c}{E_2 - E_1} \left\{ F_1^*(r) G_2(r) + G_1^*(r) F_2(r) \right\} \Big|_{r_0}^R = \delta(E_1 - E_2). \quad (2.8)$$

对 II 类态,  $\psi_{jm}^{(2)} = \begin{bmatrix} f(r)\xi_{jm}^{(2)} \\ g(r)\xi_{jm}^{(1)} \end{bmatrix}$ , ( $j \geq |q| + 1/2$ ), 同理可证它们的正交归一判据也是(2.8).

对 III 类态,

$$\psi_m^{(3)} = \begin{bmatrix} f(r)\eta_m \\ g(r)\eta_m \end{bmatrix}, (j = |q| - 1/2) \quad (2.9)$$

利用[2]中的引理2,以及上面的证明步骤,可以证明正交归一判据为:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r_0 \rightarrow 0}} \frac{-i|q|\hbar c}{E_2 - E_1} \{F_1^*(r)G_2(r) + G_1^*(r)F_2(r)\} \Big|_{r_0}^R = \delta(E_1 - E_2). \quad (2.10)$$

(2.8)、(2.10)便是推广到同时含磁荷、电荷的 Dirac 方程定态的正交归一判据。

### 三、Kazama-Yang-Goldhaber 问题

最近, Kazama-Yang-Goldhaber<sup>[2]</sup>详细地研究过“不动磁荷与荷电粒子的相对论散射问题”。对  $j \geq |q| + 1/2$  的一切态 (I、II 类态) 均可以得到完全确定的解, 但对 III 类态, 就出现相角不定性问题。实际上在  $\hbar = c = 1$  的自然单位制下, 径向方程为:

$$\begin{cases} (M - E)f(r) - i\frac{q}{|q|}\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)g(r) = 0, \\ -i\frac{q}{|q|}\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)f(r) - (M + E)g(r) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

$|E| > M$  的散射态显然是 [2]:

$$\begin{cases} f(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} C(K) \frac{1}{Kr} \sin(Kr + \delta), \\ g(r) = -i\frac{q}{|q|} \sqrt{\frac{2}{\pi}} C(K) \frac{1}{(M + E)r} \cos(Kr + \delta). \end{cases} \quad (3.2)$$

Kazama-Yang-Goldhaber 所提出的问题的尖锐性在于无论怎样选择  $\delta$ , 不能使态的奇性消失(这与三维方阱问题不同)。因此  $\delta$  没有确定下来。[2]为了消灭这个原点的奇性, 根据 Poincare 的经典工作指出, 既然荷电粒子的经典轨道不能穿越磁荷(必须弹回来), 那么“量子力学情况下原点的波函数应该为零”, 因此引入附加磁矩, 它可以在原点提供一项强大的斥力势, 从而使波函数在原点处趋于零。我们认为, 荷电粒子经典轨道不能穿越磁荷的事实, 在量子力学中应该与原点的径向几率流为零相对应。波函数为零固然可以保证径向流为零, 但径向流为零并不强求原点波函数为零, 因此对波函数的要求可以放宽些, 允许态具有奇点。可以证明, 没有径向流的要求和能量本征值为实数相当(由于矢势  $\mathbf{A}$  为实数), 还可以证明这一条件对波函数的要求是  $G(r)F(r)$  在原点的数值的实部为零(参看 [1])。 (3.2) 显然满足这个要求。因此带电粒子不能穿越磁荷的条件还不足以确定  $\delta$ , 是否量子力学的基本原理还不足以确定  $\delta$ , 或者  $\delta$  可以任意取值呢? 不是的。根据 [3], 力学量的不同本征值对应的本征态应该彼此正交, 这是测量几率的实数性的要求。而解 (3.2) 一般不满足正交条件。如果这些态构成正交系, 则对  $\delta$  要加以严格限制。实际上将 (3.2) 代入 (2.10) 得:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\pi} \frac{1}{K_1 K_2} \frac{C(K_1)C(K_2)}{E_2 - E_1} [\operatorname{tg} \phi_2 \sin \delta_1 \cos \delta_2 - \operatorname{tg} \phi_1 \cos \delta_1 \sin \delta_2] \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{C(K_1)C(K_2)}{(E_2 - E_1)K_1 K_2} \left[ \frac{\operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \delta_2}{2} (K_1 - K_2) \delta(K_1 - K_2) \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2}{2} (K_1 + K_2) \delta(K_1 + K_2) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{M^2 + K_1^2}}{|K_1|} [\delta(K_1 + K_2) + \delta(K_1 - K_2)], \quad (3.3)$$

其中

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{K_1}{M + E_1}, \quad \operatorname{tg} \phi_2 = \frac{K_2}{M + E_2}. \quad (3.4)$$

当  $K_1 \neq K_2$  时, 正交判据导至:

$$\operatorname{tg} \phi_2 \sin \delta_1 \cos \delta_2 - \operatorname{tg} \phi_1 \cos \delta_1 \sin \delta_2 = 0. \quad (3.5)$$

这个函数方程的解是:

$$\frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \phi_1} = \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \phi_2} = \dots = Q, \quad (3.6)$$

$Q$  是与能量无关的常数. 将 (3.6) 代入 (3.3), 得:

$$\begin{aligned} & \frac{C(K_1)C(K_2)}{K_1^2} \left[ \frac{E_1}{M + E_1} \delta(K_1 - K_2) + \frac{M}{M + E_1} \delta(K_1 + K_2) \right] \\ & = \frac{\sqrt{M^2 + K_1^2}}{|K_1|} [\delta(K_1 + K_2) + \delta(K_1 - K_2)]. \end{aligned}$$

因此得到归一化常数为:

$$C(K) = \sqrt{\frac{K(E + M)}{2}}. \quad (3.7)$$

因此正交归一条件并不使  $|E| > M$  的散射态的能级分立, 但使  $\delta$  整体的不定性限制到仅依赖于一个实参数  $Q$  的程度:

$$\operatorname{tg} \delta = Q \left( \frac{K}{M + E} \right). \quad (3.8)$$

正交条件只能给出两个态之间的关系, 当然不能将全部的  $\delta$  都定出来, 为了最后确定  $Q$ , 还必须有一个原则.

分析径向方程, 发现确实还可能存在着束缚态, 它们对态的完备性和最后确定  $Q$  是至关重要的. 实际上在  $|E| < M$  时, (3.1) 的解为:

$$\begin{aligned} f(r) &= A_0 \frac{K_{1/2}(K_0 r)}{\sqrt{K_0 r}} = A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{K_0 r} e^{-K_0 r}, \quad K_0 = \sqrt{M^2 - E^2}, \\ g(r) &= -i \frac{q}{|q|} \frac{\left( \partial_r + \frac{1}{r} \right) f(r)}{M + E} = i A_0 \frac{q}{|q|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r} e^{-K_0 r}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

这些态虽然是范数有界的, 但它们的能谱又是连续的. 这在物理上是不允许的, 因为数学上已严格证明: “有限变元的就范函数所组成的 Hilbert 空间的正交就范基必须是可列的”. 量子力学中用 Hilbert 空间的矢量描写状态. 由于带连续谱的束缚态不可能全都正交, 因此它们中的大部分态是量子力学所不允许的. [1]、[3] 曾指出, 有物理意义的本征态必然是正交的, 正交性要求导至束缚态能级分立. 实际上将 (3.9) 代入束缚态的正交判据:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{-i \frac{q}{|q|} \hbar c}{E_2 - E_1} \{ F_1^*(r_0) G_2(r_0) + G_1^*(r_0) F_2(r_0) \} = 0. \quad (3.10)$$

发现对  $K_0$  带来下列限制:

$$\frac{K_{01}}{M + E_1} = \frac{K_{02}}{M + E_2} = \dots = Q'. \quad (3.11)$$

因此, 确定能级的方程为:

$$\frac{K_0}{M + E} = Q'. \quad (3.12)$$

得能级的显示式为:

$$E = \frac{M(\pm 1 - Q'^2)}{1 + Q'^2}. \quad (3.13)$$

由于束缚态与散射态之间也必须彼此正交, 因而可以建立  $Q$  和  $Q'$  的联系. 实际上利用束缚态-散射态彼此正交的判据 (3.10) 得:

$$Q' = -1/Q. \quad (3.14)$$

因此整个能谱依赖于一个单参数  $Q$ . 现在来最后确定这个  $Q$ . 可以证明, “定态 Dirac 方程可以看作是态  $\psi$  中能量平均值取极值的必要条件”. 当存在相角不定性时, 这个极小与奇性态  $\psi$  所满足的边值条件有关. 在满足

$$F(0) - i \frac{q}{|q|} QG(0) = 0$$

的函数类中所得的极小能量平均值  $E_0(Q)$  还不是物理基态的能量. 真正的物理基态是所有态中能量最低的态, 因此还要求  $E_0(Q)$  对不定参数  $Q$  作变分求最小, 才能选出物理基态(在通常情况下, 由于没有相角不定性, 因此对  $Q$  变分的手续自然免去. 因此这里的定解原则是通常情况的定解原则的自然推广). 其他激发态可以由正交性唯一确定下来. 这就是本文所建议的正交-变分定解原则.

把这个原则应用于我们情况, 相当于 (3.13) 对  $Q'$  作变分. 显然, 取负号时有  $E = -M$  ( $Q'$  为任意值). 这个解是不适合的. 因为 Dirac 方程的基态是指  $E_0 \geq 0$  的态 (例如氢原子基态. 负能级不能作为基态, 因为它的最低态的  $E$  为  $-\infty$ ). 在  $E_0 \geq 0$  的条件下, 能量最小的条件是:

$$Q' = +1, \quad E_0 = 0. \quad (3.15)$$

其中考虑到  $K_0 > 0$ , 因此  $Q' = -1$  不能取, 因此得到了唯一确定的相移:

$$\text{tg } \delta = -\frac{K}{M + E}, \quad Q = -\frac{1}{Q'} = -1. \quad (3.16)$$

这样在不引入反常磁矩而用正交-变分原则获得与文章 [2] (用附加磁矩) 一致的结果 (包括相移、散射截面与波函数). 因此可以认为这个定解原则受到了一次考验. 这个原则还可以应用到其他问题中去, 例如本文第四节所述的问题等.

对于无磁荷的 Dirac 方程, 因为  $|E| < M$  的一切解都是范数无界的, 因此没有束缚态. 当磁荷存在时, 由于磁荷具有强大的磁场, 荷电 Dirac 粒子的磁矩受到它的巨大的静磁吸引作用, 荷电粒子在运动过程中又受到磁荷的 Lorentz 力的作用, 使得有可能出现结合能巨大的 (结合能为  $Mc^2$ ) 单个束缚态. 这两个因素就是这个束缚态存在的物理原因. 这个束缚态出现的预兆是散射态的奇性的存在. 在分离变量后的 Dirac 方程 (3.1) 中, Lorentz 力及磁矩与磁荷的作用往往被掩盖起来, 正是散射态的奇性促使我们去寻求这个

束缚态。这—单个能级不论反常磁矩是否存在，它都是存在的。[5]在  $\mathcal{Q} > 0$  时，也证明了  $E_0 = 0$  的态的存在。本文证明了  $\mathcal{Q} = 0$  时， $E_0 = 0$  的束缚态的存在，而且证明不存在其他束缚态能级。

#### 四、带电不动磁荷与荷电 Dirac 粒子的能级和正交完备系

本节考虑将推广的正交判据和正交-变分原则应用到新的问题中去。关于带电  $-z_0e$  不动磁荷与荷电  $ze$  粒子的非相对论能级和正交完备系已在去年的工作 [3] 中解出，辐射的光谱强度及选择规则也已在 [4] 中作了计算。现在我们讨论相对论情况：

$$\hat{H} = (c\mathbf{p} - ze\mathbf{A})\hat{\alpha} + \hat{\beta}Mc^2 - \frac{z'e^2}{r}, \quad z' = z_0z \quad (4.1)$$

本节采用普通单位。利用 [2] 中建立的两个引理，可以很方便地获得径向方程。作下列变换：

$$g(r) = i\mathcal{F}(r), \quad f(r) = \mathcal{G}(r). \quad (4.2)$$

可将 I、II 类态的径向方程化为统一的实的微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{1}{\hbar c} \left( E + \frac{z'e^2}{r} + Mc^2 \right) \mathcal{F}(r) - \left( \partial_r + \frac{1-\kappa}{r} \right) \mathcal{G}(r) = 0, \\ \frac{1}{\hbar c} \left( E + \frac{z'e^2}{r} - Mc^2 \right) \mathcal{G}(r) + \left( \partial_r + \frac{1-\kappa}{r} \right) \mathcal{F}(r) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

对 I、II 类态：

$$\kappa = \mp \sqrt{(j+1/2)^2 - q^2}.$$

指标方程的结果是：

$$\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - (z'\alpha)^2}, \quad \alpha \text{ 为精细结构常数.}$$

在 I、II 类态中，当  $z'\alpha < \sqrt{2|q|+1}$  时，对  $|E| < Mc^2$  的束缚态，与类氢原子的相似：

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{z'\alpha}{n_r + \sqrt{(j+1/2)^2 - q^2} - (z'\alpha)^2} \right)^2}}, \quad \begin{cases} n_r = 0, 1, 2, \dots \text{ I 类态,} \\ n_r = 1, 2, 3, \dots \text{ II 类态.} \end{cases} \quad (4.4)$$

(在 I、II 类态中， $z'\alpha < \sqrt{2|q|+1}$  的情况下，陆焱、孙鑫、苏汝铿、罗辽复曾用其他方法获得与 (4.4) 相同的结果)。在 (4.2) 变换下，还可以获得归一化的波函数：

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} g(r) \\ f(r) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma + n_r + 1)}}{\Gamma(2\gamma + 1)\sqrt{n_r!}} \sqrt{\frac{1 \mp \varepsilon}{4N(N - \kappa)}} \left( \frac{2z'X}{Na_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{z'X}{Na_0}} \left( \frac{2z'X}{Na_0} r \right)^{\gamma-1} \\ &\cdot \left\{ \pm n_r F \left( -n_r + 1, 2\gamma + 1, \frac{2Xz'}{a_0} r \right) \right. \\ &\left. + (N - \kappa) F \left( -n_r, 2\gamma + 1, \frac{2Xz'}{Na_0} r \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中  $N$  为有效主量子数， $N = \sqrt{(n_r + |\kappa|)^2 - 2n_r[|\kappa| - \sqrt{|\kappa|^2 - (z'\alpha)^2}]}$ ， $X = \frac{M}{M_c}$ ， $a_0 = \frac{\hbar^2}{M_c e^2}$  为 Bohr 半径， $\varepsilon \equiv \frac{E}{M_c c^2}$ 。

对 III 类态, 经过适当的变换:

$$g(r) = i\mathcal{F}(r), f(r) = -\frac{q}{|q|}\mathcal{G}(r), \quad (4.6)$$

也可以归结于统一的方程组 (4.3). 但  $\kappa = 0$ , 因此有:

$$\gamma = iz'\alpha = i\gamma_0.$$

即使对于 I、II 类态, 当  $z'\alpha > \sqrt{2|q| + 1}$  时, 也会出现类似情况:

$$\gamma = i\sqrt{(z'\alpha)^2 - (j + 1/2)^2 + q^2} = i\gamma_0,$$

说明当角动量的离心作用不足以抵御强大的吸引作用时, 出现了具有本性奇点的态. 因为这类态的数目也是无穷的, 而且基态正好在 III 类态中, 因此对天文光谱中寻求磁荷的工作将是主要的. 在这  $\gamma = i\gamma_0$  的三种情况下, 可能出现具有复数本征值的解, 它们的微分几率虽然都是有界的, 但是这些解的特点是具有径向的几率流,

$$I = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_{r=r_0} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} -2cr_0^2 \text{Im}\{\mathcal{F}^*(r_0)\mathcal{G}(r_0)\} \neq 0,$$

即奇点是吮吸源, 因此这些态都不可能稳定. [3] 中证明, 由于测量几率和测量值的实数性要求, 量子力学中力学量的本征态必须是彼此正交的. 正交性判据 (2.8)、(2.10) 排除了这些态. 那么本征值为实数的解满足怎样的判据呢? 可以证明, 对平方可积的态  $\psi$ , 存在下列关系:

$$\int \psi^+ \hat{H} \psi d\tau - \int (\hat{H}\psi)^+ \psi d\tau = E - E^* = -2ci \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \text{Im}\{\mathcal{F}^*(r)\mathcal{G}(r)\}. \quad (4.7)$$

因此本征值为实数的充分必要条件是 (4.7) 式中的极限为零. 因此物理上可能的解必须要求  $F^*(0)G(0)$  的实部为零. 这就是本征值为实数的一个判据. 显然, 如果不使 (4.3) 的解中的超几何级数中断, 则波函数的实部和虚部均在无穷远处发散; 如果中断, 则波函数的实部与虚部都不是定态; 为获得平方可积而且本征值为实数的解, 必须把两个发散的解进行适当的线性组合, 消除它们的发散部分, 并保证  $F^*(0)G(0)$  的实部为零. 这是可能的, 只要利用合流超几何级数在复平面上的渐近行为. 这个解是:

$$\begin{cases} rg(r) = -2i\sqrt{1-\varepsilon}e^{-\rho/2} \text{Im}\{\rho^\gamma \Gamma(1-2\gamma)\Gamma(\gamma-Q\varepsilon)[AF(\gamma+1 \\ -Q\varepsilon, 2\gamma+1, \rho) - F(\gamma-Q\varepsilon, 2\gamma+1, \rho)]\}, \\ rf(r) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ q \\ -|q| \end{array} \right\} (-2\sqrt{1+\varepsilon})e^{-\rho/2} \text{Im}\{\rho^\gamma \Gamma(1-2\gamma)\Gamma(\gamma-Q\varepsilon)[AF \\ (r+1-Q\varepsilon, 2\gamma+1, \rho) + F(\gamma-Q\varepsilon, 2\gamma+1, \rho)]\} \end{cases} \quad (4.8)$$

(III 类态中,  $rf(r)$  带有  $q$  的符号因子), 其中

$$A = \frac{\gamma - Q\varepsilon}{-\kappa + Q}, \quad Q = \frac{z'\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

(4.8) 这类态虽然范数有界, 但能量是连续的 ( $|\varepsilon| < 1$ ), 而且大部分这类态并不正交, 因此在物理上是不可能的. 假如对势能作某种切断近似, 可以给出能级分立的解, 但切断的方式带有很大的任意性. 即使用

$$U(r) = -U_0 = -\frac{z'e^2}{r_0}, \quad (r \leq r_0)$$

形式的切断,则  $r \leq r_0$  时有:

$$rf(r) = \begin{cases} 1 \\ -\frac{q}{|q|} \end{cases} \sqrt{r} [\mathcal{A} J_{|\kappa+1/2|}(\beta r) + \mathcal{B} N_{|\kappa+1/2|}(\beta r)],$$

$$rg(r) = \frac{i \frac{d}{dr} [rf(r)] + \kappa \frac{rf(r)}{r}}{\left[ \frac{Mc}{\hbar} (1 + \varepsilon) + \frac{1}{\hbar c} U_0 \right]}, \quad \beta = \sqrt{\left( \frac{Mc}{\hbar} \varepsilon + \frac{U_0}{\hbar c} \right)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}}. \quad (4.9)$$

由条件

$$\left[ \frac{f(r)}{g(r)} \right]_{r=r_0^-} = \left[ \frac{f(r)}{g(r)} \right]_{r=r_0^+} \quad (4.10)$$

可以求出  $|\kappa| > 0$  的态的能级来, 因为平方可积性要求  $\mathcal{B} = 0$ . 但对 III 类态,  $\kappa = 0$ , 上述的切断近似仍不能使能级分立. 此外, 目前的磁荷的整体规范场理论还不可能讨论磁荷连续分布在一个区域的情况. 下面将说明前述的正交-变分原则可以使(4.8)或(4.9) (包括  $\kappa = 0$  的情况)的能级分立.

实际上, 正交条件(2.8)、(2.10)要求能级满足下列关系:

$$\gamma_0 \ln \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arg \Gamma(\gamma_0 i - Q\varepsilon) + \arg \left\{ \frac{i\gamma_0 - Q\varepsilon}{-n + Q} - 1 \right\} = \eta_0 + n\pi. \quad (4.11)$$

在使用正交条件时必须注意仔细地消去无确定极限的量  $\ln r$ .  $\eta_0$  对一切束缚态能量是一致的, 但它的数值决定着整个能谱. 我们利用上述的基态能量 ( $E_0 \geq 0$ ) 对不定参数  $\eta_0$  变分求最小的原则定出:

$$\eta_0 = \arg \Gamma(\gamma_0 i) + \arg \left\{ \frac{i\gamma_0}{-\kappa + z'\alpha} - 1 \right\}, \quad E_0 = 0, \quad (4.12)$$

因此能级由下列函数方程决定:

$$\gamma_0 \ln \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arg \Gamma(\gamma_0 i - Q\varepsilon) - \arg \Gamma(\gamma_0 i) + \arg \left[ \frac{i\gamma_0 - Q\varepsilon}{-\kappa + Q} - 1 \right] - \arg \left\{ \frac{i\gamma_0}{-\kappa + z'\alpha} - 1 \right\} = n\pi. \quad (4.13)$$

为了获得散射相移, 为了获得定态完备正交系, 还必须讨论连续谱. 对连续谱,  $|\varepsilon| > 1$ , 可以解出本征值为实数的解为:

$$\begin{cases} r\mathcal{F}(r) = c_0 \{ \text{Im}(\omega_2 - \omega_1) + b(\varepsilon) \text{Re}(\omega_1 - \omega_2) \}, \\ r\mathcal{G}(r) = c_0 \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} \{ \text{Re}(\omega_1 + \omega_2) + b(\varepsilon) \text{Im}(\omega_1 + \omega_2) \}, \end{cases} \quad (4.14)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_1 &= e^{-\rho/2} \rho^r A_0 F(i\gamma_0 + 1 + iQ_0\varepsilon, 2\gamma_0 i + 1, \rho), \\ \omega_2 &= e^{-\rho/2} \rho^r F(i\gamma_0 + iQ_0\varepsilon, 2\gamma_0 i + 1, \rho), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$A_0 = \frac{i\gamma_0 + iQ_0\varepsilon}{-\kappa - Q_0 i}, \quad Q_0 = \frac{z'\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad \rho = i \frac{2Mc}{\hbar} \sqrt{\varepsilon^2 - 1} r = 2ipr,$$

$b(\varepsilon)$  为  $\varepsilon$  的实函数. (4.14) 这些态一般也不是彼此正交的. 为保证散射态彼此正交, 必须利用散射态的正交判据来选定  $b(\varepsilon)$ . 这时必须同时考虑  $r \rightarrow 0$  与  $r \rightarrow \infty$  时波函数的



渐近行为。如果令

$$A_0 \pm 1 = S_0^\pm e^{i\sigma^\pm},$$

可以证明对一切  $\varepsilon^2 > 1$  的态存在下列关系:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\sigma^+ - \sigma^-) = \frac{\kappa}{\gamma_0}, \\ \frac{S_0^+}{S_0^-} \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} = 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

在  $r \rightarrow \infty$  时, 注意到  $pr \gg 1$  时波函数的渐近式为:

$$\begin{cases} \omega_1 \simeq \frac{\Gamma(2\gamma_0 i + 1) A_0}{\Gamma(\gamma_0 i + Q_0 \varepsilon i + 1)} e^{i pr + Q_0 \varepsilon i \ln pr + \frac{\pi}{2} Q_0 \varepsilon i}, \\ \omega_2 \simeq e^{\pi r_0 + Q_0 \varepsilon} \frac{\Gamma(2\gamma_0 i + 1)}{\Gamma(\gamma_0 i - Q_0 i \varepsilon + 1)} e^{-i pr - Q_0 \varepsilon i \ln pr - \frac{\pi}{2} Q_0 \varepsilon i}, \end{cases} \quad (4.17)$$

其中已考虑到  $pr \gg 1$  时,  $\omega_2$  中起主要作用的项与  $\omega_1$  的不同。记

$$\frac{\Gamma(2\gamma_0 i + 1) A_0}{\Gamma(\gamma_0 i + i Q_0 \varepsilon + 1)} = \eta e^{i u}, \quad \frac{\Gamma(2\gamma_0 i + 1) e^{\pi r_0 + Q_0 \varepsilon}}{\Gamma(\gamma_0 i - i Q_0 \varepsilon + 1)} = \zeta e^{i v},$$

则

$$\begin{cases} r \mathcal{F}(r) \simeq c'_0 Q \sin\left(pr + Q_0 \varepsilon \ln pr + \frac{\pi}{2} Q_0 \varepsilon + w\right), \\ r \mathcal{G}(r) \simeq -c'_0 \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} Q \sin\left(pr + Q_0 \varepsilon \ln pr + \frac{\pi}{2} Q_0 \varepsilon + w'\right), \end{cases}$$

其中

$$Q = \frac{1}{\cos \beta} \{\eta^2 + \zeta^2 + 2\eta\zeta \cos(u + v - 2\beta)\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2(\varepsilon)}},$$

$$\cos w = \frac{-1}{Q \cos \beta} [\eta \cos(u - \beta) + \zeta \cos(\beta - v)] = -\sin w',$$

$$\sin w = \frac{-1}{Q \cos \beta} [\eta \sin(u - \beta) + \zeta \sin(\beta - v)] = \cos w',$$

$$\therefore w' - w = \frac{\pi}{2}, \quad c'_0 = c_0 \sqrt{1 + b^2(\varepsilon)} S^- e^{-\frac{\pi}{2} r_0}.$$

利用 (4.16)、(4.17), 正交-归一判据化为:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar c}{E_2 - E_1} \{c'_{01} c'_{02} \cos(\sigma^+ - \sigma^-) \sin[\gamma_0 \ln 2p_1 r + \sigma_1^- - \beta_1 - (\gamma_0 \ln 2p_2 r + \sigma_2^- \\ & \quad - \beta_2)]\} + |c_0|^2 \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon - 1} [\pi \delta(p_1 + p_2) + \pi |\varepsilon_1| \delta(p_1 - p_2)] \\ & = \delta(E_1 - E_2) = \frac{|E_1|}{\hbar^2 c^2 p_1} [\delta(p_1 + p_2) + \delta(p_1 - p_2)]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

当  $p_1 \neq \pm p_2$  时, 要求 (4.18) 左端第一项为零, 因而得到  $b(\varepsilon)$  的函数形式:

$$b(\varepsilon) \equiv \operatorname{tg} \beta(\varepsilon) = \operatorname{tg}[\gamma_0 \ln \sqrt{\varepsilon^2 - 1} + \arg(A_0 - 1) - \vartheta_0]. \quad (4.19)$$

因此, 散射态情况下, 正交条件并不导致能级分立(这是物理上所要求的, 也是运用正交-

变分原则时首先关心的,因为正是正交条件在  $|\varepsilon| < 1$  时给出能级分立),而是给出了实函数  $b(\varepsilon)$  的具体形式.  $\vartheta_0$  是与态无关的常数. 当  $E_1 \rightarrow E_2$  时, (4.18) 同时给出归一化常数:

$$c_0 = \frac{1}{Q} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{1}{\hbar c \pi}} \right)^{1/2}. \quad (4.20)$$

这样所获得的散射态与束缚态并未保证正交,因为  $\vartheta_0$  尚未确定. 物理上要求散射态与束缚态都彼此正交. 这个要求是可以办到的. 因为这时判据 (2.8) 的右端为零,左端的  $r \rightarrow \infty$  的项也为零,因此正交条件唯一地定出  $\vartheta_0$ :

$$\vartheta_0 = \arg \Gamma(\gamma_0 i) + \arg \left\{ \frac{i\gamma_0}{-\kappa + z'\alpha} - 1 \right\} + \arg \Gamma(1 - 2\gamma_0 i). \quad (4.21)$$

因此,利用正交-变分原则,使束缚态能级自然分立,但不使散射态能量分立,却可以定出实函数  $b(\varepsilon)$  的具体函数形式,最后将能级和全体定态(束缚态和散射态)及其归一化常数都确定下来. 因此同时也解决了散射问题. 同样也可以将正负磁荷的相对论定态和能级的不定性消除.

总之,量子力学中本征态全体具有整体性质,这种整体性质在某些有奇性态的问题中表现得特别明显: 一个态的相角的不定性牵涉到整组态和能级的不定性. 正交-变分原则就是利用基态能量最小和态的正交性将这种不定性消除的.

作者对杨振宁教授、谷超豪教授、夏道行教授和参加黄山基本粒子座谈会的老师与同志们的鼓励和富有教益的讨论表示衷心的感谢.

### 参 考 资 料

- [1] 戴显焘, 复旦学报, 1977, 1, 100.
- [2] Y. Kazama, C. N. Yang, A. S. Goldhaber, *Scattering of a Dirac particle with charge  $ze$  by a fixed magnetic monopole*, SB-ITP 76/63.
- [3] 戴显焘、倪光焘, 复旦学报, 1977, 3, 1.
- [4] 戴显焘、沈纯理、吴子仪, “含磁荷奇异原子的光谱强度和选择规则” (兼论天文光谱观察中寻求磁荷的可能性), 1977年天文会议(黄山)论文集.
- [5] Y. Kazama, C. N. Yang, *Existence of bound states for a charged spin 1/2 particle with an extra magnetic moment in the field of a fixed magnetic monopole*, SB-ITP 76/65.

## ON THE ELIMINATION OF PHASE ANGLE UNCERTAINTY IN SOME PROBLEMS OF RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

DAI XIAN-XI

NI GUAN-JIONG

*(Fudan University)*

## ABSTRACT

In some quantum mechanical problems involving singular states usually exists phase angle uncertainty. Recently in the investigation of the scattering of a Dirac particle with the charge  $Ze$  and a fixed magnetic monopole, Kazama, Yang and Goldhaber [2] introduced some extra magnetic moments in order to eliminate the phase angle uncertainty. In this paper, instead of introducing any extra magnetic moment we use the adjusted framework of quantum mechanics suggested in [3], the criterion of orthogonality and the variation principle of energy (indefinite phase as a variation parameter) to determine the phase angle, the scattering cross section and the bound states uniquely. These principles for the determination of the solution have been tested for its correctness, because the result is consistent with the solution of reference [2]. By using these principles the problems of scattering and bound states of systems consisting of a charged magnetic monopole and a charged Dirac particle, as well as the monopole pair are exactly solved.