

复合粒子量子场论的微扰展开 和规范不变问题

张肇西 何祚庠

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文引入了复合粒子量子场论微扰展开的同阶概念,这一概念与没有复合粒子的理论是很不相同的。例如在量子电动力学中是借助耦合常数来定义同阶的,但在这里同阶的概念与出现在方程中的算子密切相关。本文对有束缚粒子参加的跃迁过程,分别情况给出了同阶费曼图的定义。最后,我们证明了只要对于复合粒子之间的电磁跃迁把同阶费曼图计算全,规范不变是自然的结果。

在以前的工作中^[1],我们曾给出一种包括复合粒子在内的微扰展开式的普遍费曼图规则。本文在资料[1]的基础上,进一步讨论在有复合粒子时,微扰展开式的“同阶”和保持规范不变(或电流守恒)问题。其结论是:对于任何一个电磁跃迁过程的微扰展开,可以引入与理论中的B-S方程所取的积分、微分算子密切有关的“同阶”概念,在计算跃迁矩阵元时,只要将这些同阶的费曼图取全,就自动有规范不变性。

全文共三节,在第一节中提出问题和给出解决问题的线索;在第二节中分别情况给出同阶费曼图的定义;在第三节中给出把同阶费曼图计算全,则自动有规范不变的证明。

(一)

在量子电动力学微扰展开式中,只要将按耦合常数展开的同阶的费曼图取全^[注1],就自动保持有规范不变性^[2]。但是,在有复合粒子的情况,由于问题的复杂性(使粒子束缚起来的相互作用不一定是电磁作用,又B-S方程包含了选择特殊规定次序的无穷级数求和),所以这时保证规范不变性也要复杂些,仅用耦合常数难于定义清楚“同阶”这一概念。因此在没弄清“同阶”的定义之前,任选几个费曼图来计算,难于做到把同阶图计算全的要求。因此这样做不保证规范不变完全可以理解。可见弄清楚在有复合粒子时费曼图的同阶的重要性。下面举例进行说明。

现以两个自旋1/2的层子通过中性标量胶子束缚成各种复合粒子的模型来举例(这

本文1977年9月29日收到。

[注1]实际上这一条件还可以减弱。对于带电粒子线图和带电粒子圈图可以各自独立开来,分别保证计算的规范不变性^[2]。

里不考虑这一模型的真实性,只是为了用这一具体模型把本文感兴趣的问题具体化).

这一模型中的复合粒子 B-S 波函数 $\chi_{P\zeta}(p)$ 和 $\bar{\chi}_{P\zeta}(p)$ 为:

$$\begin{aligned} \chi_{P\zeta}(x_1 x_2) &= \langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)S] | P\zeta \rangle = e^{iP\cdot X} \chi_{P\zeta}(x) \\ \bar{\chi}_{P\zeta}(x_2 x_1) &= \langle P\zeta | T[\bar{\phi}(x_2)\bar{\phi}(x_1)S] | 0 \rangle = e^{-iP\cdot X} \bar{\chi}_{P\zeta}(x), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x = x_1 - x_2$, S 矩阵定义:

$$S = T e^{-i \int d^4x \mathcal{L}(x)} \quad (2)$$

动量空间 B-S 波函数定义

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2E}} \chi_{P\zeta}(p) &= \int d^4x e^{-ip\cdot x} \chi_{P\zeta}(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2E}} \bar{\chi}_{P\zeta}(p) &= \int d^4x e^{ip\cdot x} \bar{\chi}_{P\zeta}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

它们满足的 B-S 方程:

$$\begin{aligned} \int d^4p' [\bar{O}(P, p, p') - \bar{I}(P, p, p')] \chi_{P\zeta}(p') &= 0 \\ \int d^4q' \bar{\chi}_{P\zeta}(q') [\bar{O}(P, q', q) - \bar{I}(P, q', q)] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

其中微分算子 $\bar{O}(P, p, q)$ 的定义:

$$\bar{O}(P, p, q) \equiv \delta^4(p - q) \left[S_f^{(a)} \left(\frac{P}{2} + p \right) \right]^{-1} \left[S_f^{(b)} \left(\frac{P}{2} - q \right) \right]^{-1}. \quad (5)$$

积分算子 $\bar{I}(P, p, q)$ 的定义是由双粒子格林函数 $K(P, p, q)$ 所满足的下列方程规定的.即

$$\begin{aligned} \int d^4p' [\bar{O}(P, p, p') - \bar{I}(P, p, p')] K(P, p', q) &= \delta^4(p - q) \\ \int d^4q' K(P, p, q') [\bar{O}(P, q', q) - \bar{I}(P, q', q)] &= \delta^4(p - q), \end{aligned} \quad (6)$$

其中双粒子格林函数 $K(P, p, q)$ 定义:

$$\begin{aligned} K(x_1 x_2, x'_1 x'_2) &= \langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\phi}(x'_1)\bar{\phi}(x'_2)S] | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^{-8} \int d^4P d^4p d^4q e^{iP(X-X') + ipx - iqx'} K(P, p, q). \end{aligned} \quad (7)$$

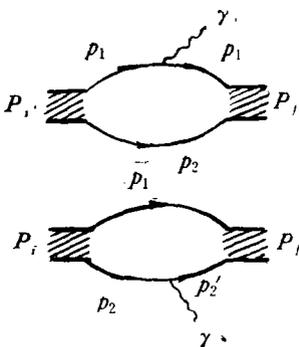


图 1

亦即 $I(P, p, q)$ 是各种可能的不可约图之和. 从以上各式不难看出 \bar{O} 和 \bar{I} 包括了各级 (指耦合常数而言) 可能的图形. 在处理复合粒子问题时, 不可避免要求解 B-S 方程, 为了求解 (或近似求解), 最简单而且常用的微扰做法是把 \bar{O} 和 \bar{I} 的无穷个图形求和进行割断, 只取前面几个图 [注2]. 因此与其相应, 在举例时我们限于模型中 \bar{O} 和 \bar{I} 取有限项的情况, 并讨论有复合粒子时定义“同阶”和保证规范不变的复杂性. 但是应指出, 下面将得到的结果并不限于 \bar{O} 和 \bar{I} 取有限项的情况.

例 1. 对于从一个复合粒子到一个复合粒子的电磁跃

[注2] 在相互作用弱时, 这样做是有理由的. 即高次项小. 对于相互作用强时, 这一做法只能了解为对 B-S 方程进行求解尝试, 很难说出深刻道理.

迁过程:

根据资料 [1], 这一过程最简单最低次费曼图如图 1, 和它相应的矩阵元如下:

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \epsilon\delta(P_f + Q - P_i) \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \cdot \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}} \cdot \int d^4p \int d^4q \bar{\chi}_{P_f}(p) \\ &\cdot \left\{ \delta\left(q - p - \frac{Q}{2}\right) \gamma_\mu^{(a)} \left[S_f^{(b)}\left(\frac{P_f}{2} - p\right) \right]^{-1} + \delta\left(q - p + \frac{Q}{2}\right) \left[S_f^{(a)}\left(\frac{P_f}{2} \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + p\right) \right]^{-1} \gamma_\mu^{(b)} \right\} \cdot \chi_{P_i}(q) \end{aligned} \quad (8)$$

如果(8)式中的B-S波函数是 $\bar{O}(P, p, q)$ 只取:

$$\bar{O}(P, p, q) = \delta(p - q) \left[S_f^{(a)}\left(\frac{P}{2} + p\right) \right]^{-1} \left[S_f^{(b)}\left(\frac{P}{2} - q\right) \right]^{-1}, \quad (9)$$

积分核 $\bar{I}(P, p, q)$ 只取:

$$\bar{I}(P, p, q) = g^2(2\pi)^{-4} \gamma_\mu^{(a)} D_f(p - q) \gamma_\mu^{(b)}, \quad (10)$$

即是最简单的梯形近似之下的B-S方程(4)的解, 则不难验证(8)式是规范不变的:

先抽出与(8)式相应的电流矩阵元:

$$\begin{aligned} \langle P_f|J_\mu(0)|P_i\rangle &= e \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \int d^4p \int d^4q \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ \gamma_\mu^{(a)} \left[S_f^{(b)}\left(\frac{P_f}{2} - p\right) \right]^{-1} \delta\left(q - \right. \right. \\ &\left. \left. p - \frac{Q}{2}\right) + \left[S_f^{(a)}\left(\frac{P_f}{2} + p\right) \right]^{-1} \gamma_\mu^{(b)} \delta\left(q - p + \frac{Q}{2}\right) \right\} \chi_{P_i}(q), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $Q = P_i - P_f$. 验证规范不变只需证明电流的散度 $Q_\mu \langle P_f|J_\mu(0)|P_i\rangle = 0$.

利用恒等式:

$$(p - p')_\mu S_f(p) \gamma_\mu S_f(p') = S_f(p) - S_f(p'), \quad (12)$$

显然有

$$\begin{aligned} Q_\mu \langle P_f|J_\mu(0)|P_i\rangle &\sim \int d^4p \int d^4q \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ - \left[S_f^{(a)}\left(\frac{P_f}{2} + p\right) \right]^{-1} \left[S_f^{(b)}\left(\frac{P_f}{2} - p\right) \right]^{-1} \delta\left(q - \right. \right. \\ &\left. \left. - p - \frac{Q}{2}\right) + \left[S_f^{(a)}\left(\frac{P_f}{2} + q\right) \right]^{-1} \left[S_f^{(b)}\left(\frac{P_f}{2} - p\right) \right]^{-1} \delta\left(q - p - \frac{Q}{2}\right) \right\} \chi_{P_i}(q) \\ &+ \int d^4p \int d^4q \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ - \left[S_f^{(a)}\left(\frac{P_f}{2} + p\right) \right]^{-1} \left[S_f^{(b)}\left(\frac{P_f}{2} - p\right) \right]^{-1} \delta\left(q - p + \frac{Q}{2}\right) \right. \\ &\left. + \left[S_f^{(a)}\left(\frac{P_f}{2} + p\right) \right]^{-1} \left[S_f^{(b)}\left(\frac{P_f}{2} - q\right) \right]^{-1} \delta\left(q - p + \frac{Q}{2}\right) \right\} \chi_{P_i}(q) \\ &\stackrel{(9)式}{=} \int d^4p \int d^4q \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ - O\left(P_i, p, q - \frac{Q}{2}\right) + O\left(P_i, p + \frac{Q}{2}, q\right) \right\} \chi_{P_i}(q) \\ &+ \int d^4p \int d^4q \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ - O\left(P_i, p, q + \frac{Q}{2}\right) + O\left(P_i, p - \frac{Q}{2}, q\right) \right\} \chi_{P_i}(q). \end{aligned} \quad (13)$$

另外根据(10)式显然有:

$$\bar{I}\left(P_i, p, q - \frac{Q}{2}\right) = \bar{I}\left(P_i, p + \frac{Q}{2}, q\right)$$

$$\text{和 } \bar{I}\left(P_i, p, q + \frac{Q}{2}\right) = \bar{I}\left(P_i, p - \frac{Q}{2}, q\right). \quad (14)$$

因此:

$$\begin{aligned}
 Q_\mu \langle P_f | J_\mu(0) | P_i \rangle \sim & \int d^4 p \int d^4 q \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ -\bar{O} \left(P_f, p, q - \frac{Q}{2} \right) + \bar{I} \left(P_f, p, q - \frac{Q}{2} \right) \right. \\
 & + \bar{O} \left(P_i, p + \frac{Q}{2}, q \right) - \bar{I} \left(P_i, p + \frac{Q}{2}, q \right) \left. \right\} \chi_{P_i}(q) + \int d^4 p \int d^4 q \bar{\chi}_{P_f}(p) \\
 & \left\{ -\bar{O} \left(P_f, p, q + \frac{Q}{2} \right) + \bar{I} \left(P_f, p, q + \frac{Q}{2} \right) + \bar{O} \left(P_i, p - \frac{Q}{2}, q \right) \right. \\
 & \left. - \bar{I} \left(P_i, p - \frac{Q}{2}, q \right) \right\} \chi_{P_i}(q) = 0. \quad \text{[最后的等号根据方程(4)].} \quad (15)
 \end{aligned}$$

即验证了(8)式中的B-S波函数是梯形近似下的B-S方程的解时,(8)式是有规范不变性的。

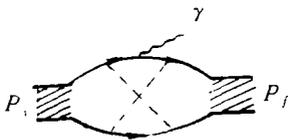
但是如果(8)中的B-S波函数是 \bar{I} 多取了一项,而 \bar{O} 不改变的B-S方程的解时,即 \bar{I} 的改变为

$$\bar{I}(P, p, q) = \bar{I}_1(P, p, q) + \bar{I}_2(P, p, q), \quad (10')$$

其中

$$\begin{aligned}
 I_1(P, p, q) &= (2\pi)^{-4} g^2 \gamma_5^{(a)} D_f(p-q) \gamma_5^{(b)}, \\
 I_2(P, p, q) &= (2\pi)^{-8} g^4 \int d^4 l \left[\gamma_5^{(a)} S_f^{(a)} \left(\frac{P}{2} + q + l \right) \gamma_5^{(a)} \right] \cdot \left[\gamma_5^{(b)} S_f^{(b)} \left(\frac{P}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - p + l \right) \gamma_5^{(b)} \right] \cdot D_f(p-q-l) D_f(l).
 \end{aligned}$$

这时不难验证不改变(8)是没有电流守恒,即没有规范不变性的。然而我们做相应的改变,即在计算电磁跃迁矩阵元时在图1的基础上再增加两个费曼图2,即在 $\langle f | S | i \rangle$ 中增加两项[注3]:



$$\begin{aligned}
 \langle f | S | i \rangle = & \delta(P_f + Q - P_i) \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}} (\langle f | J_\mu^{(1)}(0) | i \rangle \\
 & - \langle f | J_\mu^{(2)}(0) | i \rangle), \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中 $\langle f | J_\mu^{(1)}(0) | i \rangle$ 是图1的贡献,即与(11)式相同。

$\langle f | J_\mu^{(2)}(0) | i \rangle$ 是图2的贡献:

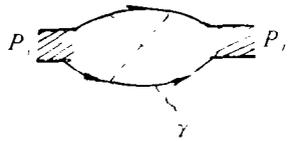


图 2

$$\begin{aligned}
 \langle f | J_\mu^{(2)}(0) | i \rangle = & e \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_i}} (2\pi)^{-8} g^4 \int d^4 p \int d^4 q \\
 & \int d^4 l \bar{\chi}_{P_f}(p) \cdot \left\{ \left[\gamma_5^{(a)} S_f^{(a)} \left(\frac{P_i}{2} + q + l - Q \right) \gamma_5^{(a)} S_f^{(a)} \left(\frac{P_i}{2} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + q + l \right) \gamma_5^{(a)} \right] \cdot \left[\gamma_5^{(b)} S_f^{(b)} \left(\frac{P_i}{2} - p + l \right) \gamma_5^{(b)} \right] \cdot D_f(l) D_f \left(q + l - p - \frac{Q}{2} \right) \right. \\
 & + \left[\gamma_5^{(a)} S_f^{(a)} \left(\frac{P_i}{2} + q + l \right) \gamma_5^{(a)} \right] \cdot \left[\gamma_5^{(b)} S_f^{(b)} \left(\frac{P_i}{2} - p + l \right) \gamma_5^{(b)} S_f^{(b)} \left(\frac{P_i}{2} - p \right. \right. \\
 & \left. \left. + l + Q \right) \gamma_5^{(b)} \right] \cdot D_f(l) D_f \left(q + l - p + \frac{Q}{2} \right) \left. \right\} \chi_{P_i}(q). \quad (17)
 \end{aligned}$$

[注3] 根据费曼规则的推导,图2相应的S矩阵除按资料[1]给出的规则外,还应多一负号,即资料[1]总结费曼规则时漏了一条,现在把它补充进去:“对于一给定的不可分拆图假如把粒子外线(本文中即光子线)都去掉时变成算子 \bar{O} 中包含的费曼图时它取正号,否则取负号。”关于符号的这条规则,下文(20)式表达得最清楚,(16)式中两电流矩阵元之间的负号,正是根据这一规则给出的。

不难验证, (16) 式对于把 (10) 改为 (10') 的情况, 重新有电流守恒. 验证的方法同前, 利用 (12) 式, 与图 2 相应的电流散度项不难证明有:

$$Q_\mu \langle f | J_\mu^{(2)}(0) | i \rangle \sim (2\pi)^{-8} g^4 \int d^4 p \int d^4 q \int d^4 l \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ \gamma_5^{(a)} \left[-S_f^{(a)} \left(\frac{P_i}{2} + q + l - Q \right) + S_f^{(a)} \left(\frac{P_i}{2} + q + l \right) \right] \cdot \gamma_5^{(a)} \cdot \left[\gamma_5^{(b)} S_f^{(b)} \left(\frac{P_i}{2} - p + l \right) \gamma_5^{(b)} \right] \cdot D_f(l) D_f \left(q + l - p + \frac{Q}{2} \right) + \left[\gamma_5^{(a)} S_f^{(a)} \left(\frac{P_i}{2} + q + l \right) \gamma_5^{(a)} \right] \cdot \gamma_5^{(b)} \left[-S_f^{(b)} \left(\frac{P_i}{2} - p + l \right) + S_f^{(b)} \left(\frac{P_i}{2} - p + l + Q \right) \right] \gamma_5^{(b)} \cdot D_f(l) D_f \left(q + l - p + \frac{Q}{2} \right) \right\} \chi_{P_i}(q)$$

根据 (10')

$$\int d^4 p \int d^4 q \bar{\chi}_{P_f}(p) \left\{ \left[-I_2 \left(P_i, p, q - \frac{Q}{2} \right) + I_2 \left(P_i, p + \frac{Q}{2}, q \right) \right] + \left[-I_2 \left(P_i, p, q + \frac{Q}{2} \right) + I_2 \left(P_i, p - \frac{Q}{2}, q \right) \right] \right\} \chi_{P_i}(q). \quad (18)$$

对于 $Q_\mu \langle f | J_\mu^{(2)}(0) | i \rangle$, 同前, 有 (13) 和 (14) 式 [只需在 $J_\mu(0)$ 加上角标“(1)”, 在 $I(P, p, q)$ 处加下角标“1”, 即 $J_\mu(0) \rightarrow J_\mu^{(1)}(0)$, $I(P, p, q) \rightarrow I_1(P, p, q)$], 这样把它们与 (18) 式合到一起, 由 (10'), 正好是 (15) 式, 重新有电流守恒.

从以上的例子我们看到保证规范不变不能像自由粒子时, 只从电磁跃迁的费曼图本身按微扰展开的阶数来看那样简单, 在有复合粒子时, 要保证规范不变, 计算时所需取的费曼图与所用的 B-S 方程中的算子 \bar{O} 和 \bar{I} 的选取 (即对 \bar{O} 和 \bar{I} 无穷项求和的割断) 有直接依赖关系. 而且上例从 (11) 到 (15) 式的变化与 (10) 式到 (10') 的变化相对应, 已经显示出了它们的依赖关系. 正是基于这些分析, 我们引入了复合粒子场论微扰展开中的同阶概念.

例 2. 对于把复合粒子被光子打散的电磁跃迁过程:

这种情况包含了比例 1 还多一层的复杂性. 仍以两层子由中性标量胶子束缚起来的模型讨论. 这时最低次的费曼图只有图 3, 根据费曼规则相应的 S 矩阵元 [注 4]:

$$\langle f | S | i \rangle = -ie(2\pi)^4 \delta(P_i + k - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{m_1}{E_1}} \cdot \sqrt{\frac{m_2}{E_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \cdot \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}} \cdot \bar{u}_r^{(a)}(p_1) \bar{u}_s^{(b)}(p_2) \cdot \left[\gamma_\mu^{(a)}(i\hat{p}_2 + m)^{(b)} \chi_{P_i} \left(\frac{p_1 - p_2}{2} - \frac{k}{2} \right) + (i\hat{p}_1 + m)^{(a)} \gamma_\mu^{(b)} \chi_{P_i} \left(\frac{p_1 - p_2}{2} + \frac{k}{2} \right) \right]. \quad (19)$$

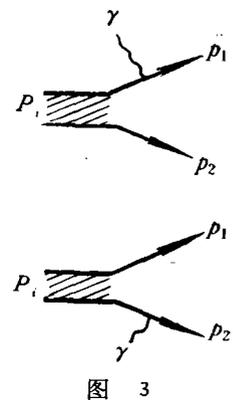


图 3

不难验证, 即使复合粒子 B-S 波函数是最简单的梯形近似下的波函数仍没有规范不变. 原因是此时还必须考虑打散开来的层子间的末态相互作用, 即需用散射波函数.

以上两例我们已经完全可以体会到有复合粒子时保持规范不变的复杂性, 同时也展

[注 4] 资料 [1] 中也列举了此例, 稍有不同之处是在那里具体模型是氘核, 另外 [1] 有错误, 应按本文 (19) 式改正.

示了解决这一问题的线索。下面我们分别情况给出“同阶费曼图”的定义,然后证明只要把同阶费曼图计算完全,自动有电流守恒,即规范不变。

(二)

从前面的例子和下面的定义,我们将看到“同阶”在有复合粒子的跃迁中有两重含义:一是费曼图之间彼此的同阶,另一是费曼图与B-S方程中选取的积分、微分算子 \bar{I} 和 \bar{O} 的同阶。现在我们分别情况给出同阶的定义。

1. 初末态各自只有一个复合粒子情况

在这种情况下,一级电磁跃迁过程与相应B-S方程同阶的费曼图(以后简称“同阶”)定义为它们中的不可分拆图形 G_μ 一定是在B-S算子 \bar{O} 和 \bar{I} 中的一条能与光子作用的内线上挂光子线得到的图形,即 G_μ 由复合粒子波函数满足的B-S方程取的算子 \bar{O} 和 \bar{I} 完全决定。并根据本文^[注3]指出的需要对资料[1]给出的费曼规则做一条补充:在 \bar{O} 的内线上挂光子线得到的图形取正号,在 \bar{I} 的内线上挂光子线得到的图形取负号。

对 \bar{O} 和 \bar{I} 上挂光子线可用泛函微分的方法表示出来。

为此在相互作用中增加一外源项:

$$\mathcal{L}_i^A = J_\mu(x) A_\mu^{(*)}(x),$$

其中 $A_\mu^{(*)}$ 是外源(不量子化); $J_\mu(x)$ 是电流算符。由于增加了相互作用 \mathcal{L}_i^A , S 矩阵(2)式改为

$$S^A = T e^{-i \int d^4x \mathcal{L}_i(x) + i \int d^4x J_\mu(x) A_\mu^{(*)}(x)} \quad (2')$$

如前面为列出B-S方程由(6)和(7)式规定算子 $\bar{O}(P, p, q)$, $\bar{I}(P, p, q)$ (即一系列截腿的双粒子不可约图)那样,完全对应地定义相应的算子 $\bar{O}^A(P, p, q)$ 和 $\bar{I}^A(P, p, q)$, (只是把原来出现 S 矩阵的地方换成 S^A ,并除掉由于引入外源造成空态改变因子 $\langle 0|S^A|0\rangle$),同时具体问题中把 \bar{O} 和 \bar{I} 无穷个图求和“割断”(只保留几个图)时,对 \bar{O}^A 和 \bar{I}^A 做同样的割断,即在做 S^A 对 S 的代换时,保持二者对于相互作用 $\mathcal{L}_i(x)$ 取相同的级数。

在有了 \bar{O}^A 和 \bar{I}^A 定义之后,对于初末态各自只有一个复合粒子的电流矩阵元的同阶不可分拆图我们用 G_μ 代表,根据上述同阶定义,所有同阶不可分拆图形集合的求和 $\{G_\mu\}$ 可用泛函微分的形式表示出来:

$$\{G_\mu\} \equiv \sum_{\text{同阶}} G_\mu = \frac{\delta(\bar{O}^A - \bar{I}^A)}{\delta A_\mu^{(*)}} \Big|_{A_\mu^{(*)} \rightarrow 0}$$

下面简写为^[注5] $\frac{\delta(\bar{O} - \bar{I})}{\delta A_\mu}$. (20)

其中 $\frac{\delta \bar{O}^A}{\delta A_\mu^{(*)}} \Big|_{A_\mu^{(*)} \rightarrow 0}$ 和 $\frac{\delta \bar{I}^A}{\delta A_\mu^{(*)}} \Big|_{A_\mu^{(*)} \rightarrow 0}$ 之间的负号正是本文对费曼规则做的补充规定给出的。

现在举例来说明同阶费曼图。

i) 当组成复合粒子的两粒子带电,它们之间交换的胶子不带电(不与光子作用)。这

[注5] 在下文中凡是有泛函微分记号的地方都了解为这里使用的引入外源相互作用后对外源的变分,是一种简写。

时同阶的费曼图当 B-S 方程的算子 \bar{O} 和 \bar{I} 只取最简单图(梯形近似)的情况, 上节例 1 已讨论不再重复. 所以讨论 \bar{O} 和 \bar{I} 取复杂些的情况:

当 \bar{O} 取图 4, \bar{I} 取图 5 时,



图 4

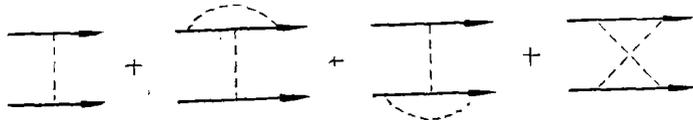


图 5

则同阶的费曼图(只画不可分拆图)将是:

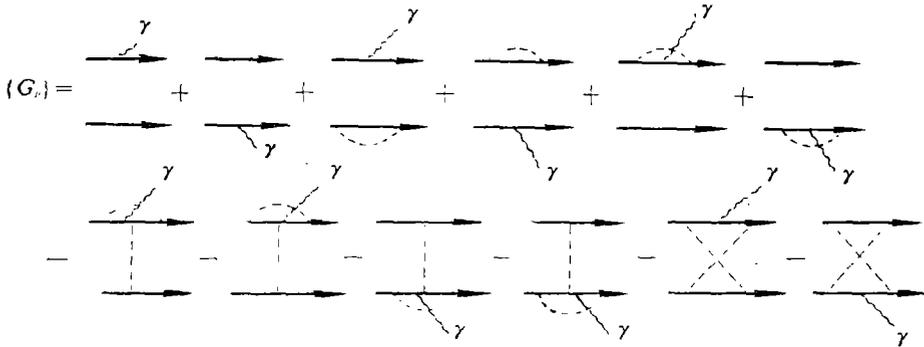


图 6

在图 6 中标明了这些不可分拆图的相对符号.

ii) 组成复合粒子的两个粒子一个带电, 另一个不带电(不与光子相互作用). 而它们之间交换的胶子带电的情况:

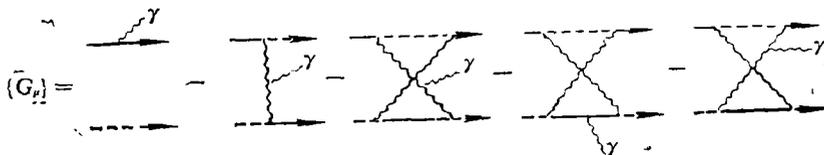
若 B-S 方程中的算子 \bar{O} 取图 7 的两个图相加和 \bar{I} 取图 8 的四个图相加时:



图 7

图 8

图中虚线表示中性粒子, 则同阶电磁跃迁图为(只计不可分拆图):



+ (将上图上下两根粒子线互换图)

图 9

此例的特点是指出如果胶子带电,同阶图中应包括在胶子线上挂光子线的图.

2. 光子把复合粒子打散(或反过来)的情况

在这种情况下除了要求不可拆图 G_μ 有由(20)式给出的关系外,还要求把末态相互作用考虑完全,即这时的同阶费曼图可用图10表示. 其中 K 是双粒子格林函数,由(6)式定义. 而其中的 G_μ 有

$$\sum G_\mu = \frac{\delta(\vec{O} - \vec{I})}{\delta A_\mu} \quad (21)$$

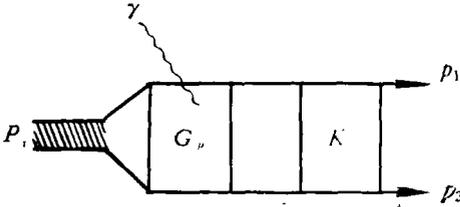


图 10

即图10. 实际上表示许多图的相加.

3. 初末态有多个复合粒子情况

这种情况比前两种情况复杂,是前两种情况的进一步发展.

对于这种情况我们从 $\gamma + \pi \rightarrow \rho + \pi$ 的例子出发给出同阶的定义. 第一步我们先研究把 γ 去掉的虚过程“ $\pi \rightarrow \rho\pi$ ”(以后把这虚过程称为原来过程的“核”),对于 $\pi \rightarrow \rho\pi$,亦可以按资料[1]的办法分拆成不可分拆图 G , 对于任何一个给定的 G , 可以建立 $\gamma + \pi \rightarrow \rho + \pi$ 的一种同阶费曼图. 即从不可分拆图 G 出发, 在原来接 B-S 波函数的地方通过双粒子格林函数 K 都接上 B-S 算子 $(\vec{O} - \vec{I})$, 然后在每条可以与光子有相互作用的粒子内线上挂光子线, 每挂一次得到一个图形, 如果是可以分拆的, 把它分拆为不可分拆的, 这样在不同内线上挂光子线, 得到的不同的不可分拆图形就是同阶的不可分拆图. 这些不可分拆图的总和可以表示为:

$$\begin{aligned} \{G_\mu\} = & \left[\frac{\delta(\vec{O} - \vec{I})}{\delta A_\mu} \right]_{p_1 p_2, p'_2 p'_1} \cdot K(p'_1 p'_2, p'_2 p'_1) \cdot G[\pi(p'_1 p'_2); \rho(p_4 p_3), \pi(p_6 p_5)] \\ & + \frac{\delta G[\pi(p_1 p_2); \rho(p_4 p_3), \pi(p_6 p_5)]}{\delta A_\mu} \\ & + G[\pi(p_1 p_2); \rho(p'_4 p'_3), \pi(p_6 p_5)] \cdot K(p'_3 p'_4, p'_4 p'_3) \cdot \left[\frac{\delta(\vec{O} - \vec{I})}{\delta A_\mu} \right]_{p'_3 p'_4, p_4 p_3} \\ & + G[\pi(p_1 p_2); \rho(p_4 p_3), \pi(p'_6 p'_5)] \cdot K(p'_5 p'_6, p'_6 p'_5) \cdot \left[\frac{\delta(\vec{O} - \vec{I})}{\delta A_\mu} \right]_{p'_5 p'_6, p_6 p_5}. \quad (22) \end{aligned}$$

其中 $G[\pi(p_1 p_2); \rho(p_3 p_4), \pi(p_5 p_6)]$ 是核 $\pi \rightarrow \rho\pi$ 的相应的不可分拆图; “ \cdot ”表示相乘和对重复动量的积分[注6]. 可见不同 G 有不同的同阶费曼图.

从上面例子我们看到可以如下定义同阶不可分拆图. i) 同阶的不可分拆图是建立在核过程的同一个不可分拆图 G 上的, 不同的 G 有相应的不同的同阶的不可分拆图. ii) 对于一个给定的核过程不可分拆图 G , 把原来接 B-S 波函数的地方, 通过双粒子格林函数 K [满足方程(6)] 分别接上 $\frac{\delta(O - I)}{\delta A_\mu}$ (每次在一个地方接), 再加上 $\frac{\delta G}{\delta A_\mu}$ 的图就构成了建立在 G 上的同阶的全部不可分拆图的和[对于 $\gamma + \pi \rightarrow \rho + \pi$ 过程就是(22)式].

从上面定义和下节的证明, 我们将会看到对于复合粒子间的电磁跃迁, 计算同阶以外的更复杂的费曼图是无意义的.

[注6] B-S 算子和不可分拆图 G 都是截“腿”的, 因此不能直接把它们接起来, 至于在此我们选择双粒子格林函数 K [满足方程(6)] 提供“腿”把它们接起来是出于同阶的考虑.

下面证明, 只要做到把同阶费曼图计算完全, 自动有规范不变性。

(三)

在证明同阶费曼图计算全自动有电流守恒即规范不变之前, 首先指出矢量介子湮灭为光子的这一最简单情况下, 自动有电流守恒。因此在我们证明了同阶费曼图算全自动有电流守恒之后, 我们就对有复合粒子时的规范不变性有一个完整的解决。

对于一个矢量介子湮灭为光子的矩阵元:

$$\begin{aligned} \langle 0 \| J_\mu(z) \| \bar{P}\zeta \rangle &= -i \int d^4X d^4x \delta^4(z - X) \delta^4(x) S p \Gamma_\mu \chi_{P\zeta}(X, x) \\ &= -i S p \Gamma_\mu \chi_{P\zeta}(z, 0). \end{aligned} \quad (23)$$

电流算子 $J_\mu(x) = ie\bar{\psi}(x)\Gamma_\mu\psi(x)$, 最小电磁作用 $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$ 。(23) 式左方矩阵元中的两竖表示海森堡表象矩阵元。 $\chi_{P\zeta}(X, x)$ 是矢量介子的 B-S 波函数, 因此 $S p \Gamma_\mu \chi_{P\zeta}(z, 0)$ 一定出极化矢量因子 f_μ , 由 $f_\mu P_\mu = 0$, 保证了此时的规范不变性。

现在我们来证明同阶费曼图计算全自动有电流守恒。

对于最小电磁作用电流算子:

$$\begin{aligned} J_\mu(x) &= ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \text{——费米子。} \\ J_\mu(x) &= -ie\varphi^*(x)\tilde{\delta}_\mu\varphi(x) \text{——带电标量粒子。} \end{aligned}$$

电磁顶角和传播子之间有下列华德等式:

$$\text{费米子: } (p' - p)_\mu S_f(p') \Gamma_\mu(p', p) S_f(p) = S_f(p') - S_f(p) \quad (24)$$

$$\text{玻色子: } (p' - p)_\mu D_f(p') \Gamma_\mu(p', p) D_f(p) = D_f(p') - S_f(p) \quad (25)$$

其中传播子和顶角函数定义:

$$S_f(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T(\psi(x)\bar{\psi}(0)) | 0 \rangle \quad (26)$$

$$ie S_f(p) \Gamma_\mu(p, p') S_f(p') = \int d^4x d^4y e^{-ipx + ip'y} \langle 0 | T(\psi(x) J_\mu(0) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle \quad (27)$$

$$D_f(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T[\varphi(x)\varphi^*(0)] | 0 \rangle \quad (28)$$

$$ie D_f(p) \Gamma_\mu(p, p') D_f(p') = \int d^4x d^4y e^{-ipx + ip'y} \langle 0 | T[\varphi(x) J_\mu(0) \varphi^*(y)] | 0 \rangle. \quad (29)$$

与第一节中举例时所用的方法相同, 即只需证明电流散度矩阵元为零。利用上面列出的华德等式, 立即能把每一个费曼图相应的电流矩阵元散度拆成正、负两项。这样把全部同阶费曼图都加起来时, 相邻的同阶图(在 $\bar{0}$ 或 $\bar{1}$ 的只隔一个顶角的两条内线上分别挂上光子线的费曼图称为相邻的同阶图)的电流散度矩阵元总保持两项相消剩两项的两两相消的关系, 因此全部电流散度矩阵元的同阶图求和, 两两相消的结果是只剩最外端的两项[注7]。

1. 若初末态各自只有一个复合粒子, 其电流矩阵元一般写为:

[注7] 这种利用华德等式, 把同阶费曼图加起来的电流散度矩阵元由于有两两相消的性质, 使结果非常简单, 只剩外端两项的情况与自由粒子情况完全相同。参见资料[2]。

$$\langle P_f | J_\mu(0) | P_i \rangle = e \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_f}} \int dp \int dq \bar{\chi}_{P_f}(p) \sum_i G_\mu^{(i)}(P_f p; P_i q) \chi_{P_i}(q). \quad (30)$$

其中 \sum_i 表示对全部同阶图求和; 因为规定是放出光子, 所以有 $P_f + Q = P_i$, Q ——光子动量.

那么根据上面指出的证明方法, 略去中间步骤, 直接写出结果(两两相消只剩下首末两项的结果):

$$\begin{aligned} Q_\mu \sum_i G_\mu^{(i)}(P_f, p; P_i, q) = & \left\{ - \left[O\left(P_f, p, q - \frac{Q}{2}\right) - I\left(P_f, p, q - \frac{Q}{2}\right) \right] \right. \\ & + \left[O\left(P_i, p + \frac{Q}{2}, q\right) - I\left(P_i, p + \frac{Q}{2}, q\right) \right] \left. \right\} + \left\{ - \left[O\left(P_f, p, q + \frac{Q}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - I\left(P_f, p, q + \frac{Q}{2}\right) \right] + \left[O\left(P_i, p - \frac{Q}{2}, q\right) - I\left(P_i, p - \frac{Q}{2}, q\right) \right] \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

这一结果对于胶子带电和不带电情况都正确. 由(30), (31)式和(4)式, 立刻有

$$Q_\mu \langle P_f | J_\mu(0) | P_i \rangle = 0 \quad (32)$$

2. 若一个复合粒子被打散, 电流矩阵元一般写为:

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 | J_\mu(0) | P_i \rangle = & e (2\pi)^4 \sqrt{\frac{m}{E_1}} \cdot \sqrt{\frac{m}{E_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \bar{u}^{(a)}(p_1) \bar{u}^{(b)}(p_2) [S_f^{(a)}(p_1)]^{-1} \\ & \cdot [S_f^{(b)}(p_2)]^{-1} \cdot \int dp \int dq K\left(p_1 + p_2, \frac{p_1 - p_2}{2}, p\right) \sum_i G_\mu^{(i)}(p_1 + p_2, p; P_i, q) \chi_{P_i}(q). \quad (33) \end{aligned}$$

其中规定吸收光子, 所以光子动量 $k = -Q = p_1 + p_2 - P_i$. (33)式中的两个因子 $[S_f^{(a)}(p_1)]^{-1} [S_f^{(b)}(p_2)]^{-1}$ 是用来截格林函数 K 的“腿”的. 因此尽管有

$$\bar{u}^{(a)}(p_1) [S_f^{(a)}(p_1)]^{-1} = \bar{u}^{(b)}(p_2) [S_f^{(b)}(p_2)]^{-1} = 0, \quad (34)$$

但是(33)式不为零. 这时电流散度中的两两相消的结果是:

$$\begin{aligned} k_\mu \sum_i G_\mu^{(i)}(p_1 + p_2, p; P_i, q) = & \left\{ \left[O\left(p_1 + p_2, p, q + \frac{k}{2}\right) - I\left(p_1 + p_2, p, q + \frac{k}{2}\right) \right] \right. \\ & \left. - \left[O\left(P_i, p - \frac{k}{2}, q\right) - I\left(P_i, p - \frac{k}{2}, q\right) \right] \right\} \\ & + \left\{ \left[O\left(p_1 + p_2, p, q - \frac{k}{2}\right) - I\left(p_1 + p_2, p, q - \frac{k}{2}\right) \right] \right. \\ & \left. - \left[O\left(P_i, p + \frac{k}{2}, q\right) - I\left(P_i, p + \frac{k}{2}, q\right) \right] \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

由(33), (35), B-S方程(4)和双粒子格林函数 K 满足的方程(6):

$$\begin{aligned} k_\mu \langle p_1 p_2 | J_\mu(0) | P_i \rangle = & e \sqrt{\frac{m}{E_1}} \cdot \sqrt{\frac{m}{E_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \bar{u}^{(a)}(p_1) \bar{u}^{(b)}(p_2) [S_f^{(a)}(p_1)]^{-1} [S_f^{(b)}(p_2)]^{-1} \\ & \cdot \int d^4 q \left[\delta\left(\frac{p_1 - p_2}{2} - q - \frac{k}{2}\right) - \delta\left(\frac{p_1 - p_2}{2} - q + \frac{k}{2}\right) \right] \chi_{P_i}(q) \end{aligned}$$

[注8] 这里由于有两条粒子线可以挂光子, 因此有四个“端项”. (31)式中每个方括号内是一个“端项”. 花括号内是一条可以挂光子的粒子线的两个“端项”.

$$= e \sqrt{\frac{m}{E_1}} \cdot \sqrt{\frac{m}{E_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \bar{u}^{(a)}(p_1) \bar{u}^{(b)}(p_2) [S_f^{(a)}(p_1)]^{-1} [S_f^{(b)}(p_2)]^{-1} \cdot \left[\chi_{p_i} \left(\frac{p_i}{2} - p_2 \right) + \chi_{p_i} \left(p_1 - \frac{p_i}{2} \right) \right], \quad (36)$$

出现在 (36) 式中两个 B-S 波函数的极点分别是:

$$[S_f^{(a)}(p_1 - k)] [S_f^{(b)}(p_2)] \text{ 和 } [S_f^{(a)}(p_1)] [S_f^{(b)}(p_2 - k)],$$

这时 (36) 式中的两个因子 $[S_f^{(a)}(p_1)]^{-1} [S_f^{(b)}(p_2)]^{-1}$ 只有一个能消掉, 剩下的一个因子作用到 Dirac 旋量上, 由 (34) 式因此有:

$$k_\mu \langle p_1 p_2 | J_\mu(0) | p_i \rangle = 0. \quad (37)$$

3. 若初末态有多个复合粒子, 以 (22) 式来说明, 对于含 $\frac{\delta(\bar{O} - \bar{I})}{\delta A_\mu}$ 的同阶图求和,

其贡献的电流散度有类似 (31) 和 (35) 式的结果, 即两两相消后只剩两端的项, 然后利用 B-S 方程 (4) 和双粒子格林函数 K 满足的方程 (6), 其中一些作用到波函数上为零 (正好是 B-S 算子 $\bar{O} - \bar{I}$ 作用到 B-S 波函数上), 另一些作用到双粒子格林函数 K 上, 利用方程 (6) 之后, 正好与核的不可分拆图挂光子得到的同阶图形求和 [即 (22) 式中的 $\frac{\delta G}{\delta A_\mu}$ 项] 的电流散度两两相消剩下的外端项完全抵消, 使整个 (22) 式相应的电流散度为零. 由于公式繁复, 上述证明不再用公式写出来了.

最后指出: 1) 以上同阶定义和规范不变性的证明全都不需限制 \bar{O} 和 \bar{I} 只包含有限个不可约图的情况, 因此是一般的. 2) 以上全部讨论都是建立在两个费米子组成复合粒子的情况下, 实际上对于三个费米子或正反费米子等组成复合粒子的情况可完全一样地定义同阶和保证规范不变性. 3) 以上的讨论都是建立在未重整化的基础上的. 实际上只要正规化处理严格 (例如采用 Pauli-Villars 方法^[3] 或近年发展的维数正规化方法^[4]) 再对于基本场按通常单粒子重整理论进行重整, 对于复合粒子的重整按资料 [5] 给出的方法进行重整, 不难看出, 重整之后把同阶费曼图计算完全亦有规范不变性, 即重整化不破坏规范不变性.

最后我们可以总结如下: 对于任何一个电磁跃迁过程, 只要把与所用 B-S 方程同阶的费曼图算全, 则自动有电流守恒即规范不变性.

感谢朱洪元同志对这一工作的关心和有益的讨论.

参 考 资 料

- [1] 何祚麻, 张肇西, 黄涛, 物理学报, **25** (1976), 215.
- [2] J. D. Bjorken, S. D. Drell, «Relativistic Quantum Fields».
- [3] 可参看 H. H. 波戈留波夫, Д. Б. 希尔科夫, «量场论导引».
- [4] G. 't Hooft, M. T. Veltman, Nucl. Phys., **44B** (1973) 189.
- [5] 何祚麻, 张肇西, 物理学报, **26** (1977), 540.

THE PERTURBATION EXPANSION OF THE QUANTIZED COMPOSITE FIELD THEORY AND GAUGE INVARIANCE

CHANG CHAO-SHIE HO TSU-HSIU

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper we introduce the concept of "same order" in the perturbation expansion of the quantized composite field theory which is different from single particle theory. For example, in the case of Q. E. D., "same order" is defined by means of a coupling constant, but here it closely relates the operators occurring in the B. S. equations. Feymann graphs of the "same order" are defined for different kinds of transitions in the composite field theory. Finally, we prove that guage invariance is a natural result as long as all "same order" Feymann graphs are calculated for an electromagnetic transition between composite particles.