第2卷 第1期　　高能物理与核物理　　Vol. 2, No. 1
1978年1月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　January, 1978

变速运动磁单极场强的各种表式及磁单极势的积分形式

杜东生
（中国科学院高能物理研究所）

阮图南
（中国科学技术大学）

摘　　要

本文给出了加速运动磁单极场强的严格解．从势的积分定义出发导出了静止、匀速直线运动的磁单极势的具体表达式．讨论了加速磁单极势的形式问题．结果表明，在静止情况下得到吴-杨势．匀速运动情况下的势也可以通过 Lorentz 变换从吴-杨势得到．但加速运动磁单极的势不可能通过 Lorentz 变换得到．而加速电子的李纳-维谢尔势却可通过 Lorentz 变换得到． 这表明加速磁荷与电荷有着本质的差异．

（一）引　　言

对只有一个电子和一个磁单极子组成的体系，Maxwell 方程可写成：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{E}(x)=4\pi e\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_e(t)]\\
&\nabla\times\mathbf{H}(x)=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}e\mathbf{v}_e(t)\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_e(t)]\\
&\nabla\cdot\mathbf{H}(x)=4\pi g\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)]\\
&\nabla\times\mathbf{E}(x)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\frac{4\pi g}{c}\mathbf{v}_m(t)\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)],
\end{aligned}
\right.
\tag{1}
$$

其中，$(\mathbf{x}, t)$ 为观察地点和时间，$\mathbf{x}_e(t)$, $\mathbf{x}_m(t)$ 分别为 t 时刻电子和磁单极子的位置矢量．

显然，(1) 式在对偶变换 $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\to-\mathbf{E}$, $e\to g$, $g\to-e$ 下不变．

定义电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 及其对偶张量 $\tilde{F}_{\mu\nu}$:

$$
F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}
0 & H_3 & -H_2 & -iE_1\\
-H_3 & 0 & H_1 & -iE_2\\
H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3\\
iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0
\end{pmatrix},
\tag{2}
$$

本文 1977 年 7 月 20 日收到．

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}=\begin{pmatrix}0 & -E_3 & E_2 & -iH_1\\ E_3 & 0 & -E_1 & -iH_2\\ -E_2 & E_1 & 0 & -iH_3\\ iH_1 & iH_2 & iH_3 & 0\end{pmatrix}, \tag{3}$$

则方程(1)可改写为:

$$\begin{cases}\partial_\alpha\tilde{F}_{\beta\gamma}+\partial_\beta\tilde{F}_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma\tilde{F}_{\alpha\beta}=i\dfrac{4\pi}{c}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}j_\mu^{(e)}\\ \partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta}=-i\dfrac{4\pi}{c}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}j_\mu^{(m)}.\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases}j_\mu^{(e)}(x)=ev_\mu^{(e)}(t)\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_e(t)],\quad j_\mu^{(m)}(x)=gv_\mu^{(m)}(t)\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)],\\ v_\mu(t)=[\mathbf{v}(t),ic].\end{cases} \tag{5}$$

我们把电磁场分为两部分即电荷产生的场和磁荷产生的场

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_e+\mathbf{E}_m,\qquad \mathbf{H}=\mathbf{H}_e+\mathbf{H}_m,$$

或

$$F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^{(e)}+F_{\mu\nu}^{(m)}, \tag{6}$$

其中, $\mathbf{E}_e$、$\mathbf{H}_e$ 由下式确定

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{E}_e(x)=4\pi e\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_e(t)]\\ \nabla\times\mathbf{H}_e(x)=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}_e}{\partial t}+\dfrac{4\pi}{c}e\mathbf{v}_e(t)\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_e(t)]\\ \nabla\cdot\mathbf{H}_e(x)=0\\ \nabla\times\mathbf{E}_e(x)=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}_e}{\partial t},\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\partial_\nu F_{\mu\nu}^{(e)}=\dfrac{4\pi}{c}j_\mu^{(e)}\\ \partial_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}=0.\end{cases} \tag{7}$$

而 $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{H}_m$ 由下式确定

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{E}_m(x)=0\\ \nabla\times\mathbf{H}_m(x)=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}_m}{\partial t}\\ \nabla\cdot\mathbf{H}_m(x)=4\pi g\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)]\\ \nabla\times\mathbf{E}_m(x)=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}_m}{\partial t}-\dfrac{4\pi}{c}g\mathbf{v}_m(t)\delta^3[\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)],\end{cases}\quad 或\begin{cases}\partial_\nu F_{\mu\nu}^{(m)}=0\\ \partial_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}^{(m)}=\dfrac{4\pi}{c}j_\mu^{(m)}.\end{cases} \tag{8}$$

引入两种矢势 $A_\mu^{(e)}=(\mathbf{A}_e,i\varphi_e)$, $A_\mu^{(m)}=(\mathbf{A}_m,i\varphi_m)$, 使得

$$\begin{cases}\mathbf{E}_e=-\nabla\varphi_e-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{A}_e}{\partial t}\\ \mathbf{H}_e=\nabla\times\mathbf{A}_e,\end{cases}\quad\begin{cases}\mathbf{E}_m=-\nabla\times\mathbf{A}_m\\ \mathbf{H}_m=-\nabla\varphi_m-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial t},\end{cases}\quad\begin{cases}\partial_\mu A_\mu^{(m)}=0\\ \partial_\mu A_\mu^{(e)}=0,\end{cases} \tag{9}$$

则(9)式可改写为

$$F_{\mu\nu}^{(e)}=\partial_\mu A_\nu^{(e)}-\partial_\nu A_\mu^{(e)},\qquad \tilde{F}_{\mu\nu}^{(m)}=\partial_\mu A_\nu^{(m)}-\partial_\nu A_\mu^{(m)}. \tag{10}$$

则有

$$F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^{(e)}+F_{\mu\nu}^{(m)}=\partial_\mu A_\nu^{(e)}-\partial_\nu A_\mu^{(e)}+i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma^{(m)}, \tag{11}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\tilde{F}_{\mu\nu}^{(e)}+\tilde{F}_{\mu\nu}^{(m)}=\partial_\mu A_\nu^{(m)}-\partial_\nu A_\mu^{(m)}-i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma^{(e)}, \tag{12}$$

(11) 式中 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma^{(m)}$ 的存在使理论无法纳入拉氏形式，至少目前不知道如何纳入拉氏形式. 解决这个问题的途径是将 (11) 式设法改写成标准形式 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$，然后再纳入拉氏形式.

下面第(二)节中我们首先给出变速运动磁单极场强 $F_{\mu\nu}$ 的各种表式. 第(三)节采用路径积分的方法定义矢势从而将 $F_{\mu\nu}$ 纳入标准形式. 第(四)节从积分定义出发讨论了磁荷静止及作匀速直线运动时的矢势及场强的具体表达式及其变换性质. 还讨论了变速运动磁单极矢势的可能形式. 第(五)节给出磁单极势可能的统一形式. 目的是为讨论多磁单极体系提供方便.

(二) 变速运动磁单极势及场强的各种表式

在资料 [1] 中曾讨论了直线加速磁单极的势及场强表达式. 这里从另一方法给出了任意变速运动单极势及场强的严格解. 不需要限于直线运动. 将 (10) 代入 (8) 式有

$$\Box A_\mu^{(m)}(x)=-\frac{4\pi}{c}j_\mu^{(m)}(x), \tag{13}$$

(13) 式的推迟解为

$$A_\mu^{(m)}(x)=A_\mu^{(0)}(x)+\frac{1}{c}\int d^4x' D_R(x-x')j_\mu^{(m)}(x'). \tag{14}$$

这里我们不讨论齐次解 $A_\mu^{(0)}(x)$，而 (14) 中第二项对应非齐次解即磁荷所产生的势

$$A_\mu^{(m)}(x)=\frac{1}{c}\int d^4x' D_R(x-x')j_\mu^{(m)}(x')=g\frac{v_\mu\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr\left[1-v_r\left(t-\frac{r}{c}\right)\Big/c\right]}. \tag{15}$$

其中

$$v_\mu(t)=\frac{dx_\mu(t)}{dt}=[\mathbf{v}(t),ic],$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_m\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

$$r=|\mathbf{r}|,\qquad v_r(t)=\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{r}/r,$$

(15) 式可改写为

$$A_\mu^{(m)}(x)=g\frac{u_\mu}{R}. \tag{16}$$

这里 $u_\mu=\dfrac{v_\mu/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 为推迟时刻 $t-\dfrac{r}{c}$ 的四度速度，写出时我们略去了宗量 $t-\dfrac{r}{c}$.

以下我们在写出表达式时都略去 $t-\frac{r}{c}$ 这个宗量，而把所有的量理解为推迟时刻的量.

$$R=-r_\mu u_\mu,\ r_\mu=x_\mu-x_\mu^{(m)}\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

现在我们从 (16) 出发求出场强表达式.

由 (10)、(16):

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_{\mu\nu}^{(m)}(x)&=\partial_\mu A_\nu^{(m)}(x)-\partial_\nu A_\mu^{(m)}(x)\\&=-\frac{g}{R^2}\left\{\frac{1+r_\sigma W_\sigma}{R}(r_\mu u_\nu-r_\nu u_\mu)+r_\mu W_\nu-r_\nu W_\mu,\right.\end{aligned}\tag{17}$$

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x)=-\frac{1}{2i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\widetilde{F}_{\rho\sigma}^{(m)}=-i\frac{g}{R^3}\epsilon_{\rho\sigma\lambda\tau}r_\rho u_\sigma(\delta_{\mu\lambda}+r_\mu W_\lambda)(\delta_{\nu\tau}+r_\nu W_\tau),\tag{18}$$

上两式中 $W_\mu=W_\mu\left(t-\frac{r}{c}\right)=\dfrac{du_\mu\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c\sqrt{1-v^2\left(t-\frac{r}{c}\right)\Big/c^2}\,d\left(t-\frac{r}{c}\right)}$ 为推迟时刻的四度加速度.

(18) 式中，$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的下脚标 $\mu\nu$ 已被移至 δ 符号上去了.

定义类空方向矢量

$$n_\mu=a_{\mu\nu}R_\nu/R,\tag{19}$$

其中

$$R_\nu=r_\nu-Ru_\nu.$$

$a_{\mu\nu}$ 是推迟时刻 $t-\frac{r}{c}$ 从实验室系到磁单极静止系的 Lorentz 变换. 满足条件

$$\begin{cases}a_{ij}=\delta_{ij}+e_ie_j(u_0-1) & a_{i4}=iu_i\\ a_{4\nu}=-iu_\nu & e_i=u_i/|\mathbf{u}|\\ a_{i\nu}u_\nu=0 & a_{4\nu}u_\nu=i,\end{cases}\tag{20}$$

显然

$$n_4=0\quad n_i=a_{i\nu}r_\nu/R\quad \mathbf{n}^2=1.\tag{21}$$

利用

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}u_\sigma=i\epsilon_{ijk}a_{i\mu}a_{j\nu}a_{k\rho}\tag{22}$$

$F_{\mu\nu}^{(m)}(x)$ 的表达式可改写为

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x)=\frac{g}{R^2}\epsilon_{ijk}(a_{i\mu}+r_\mu a_{i\lambda}W_\lambda)(a_{j\nu}+r_\nu a_{j\tau}W_\tau)n_k,\tag{23}$$

其中，$i,j,k=1,2,3$.

利用

$$\delta_{\mu\lambda}+r_\mu W_\lambda=\partial_\mu r_\lambda-\hat{r}_\mu u_\lambda-R\partial_\mu u_\lambda,\tag{24}$$

(18) 式又可改写为

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x)=-ig\epsilon_{\rho\sigma\lambda\tau}\hat{r}_\rho u_\sigma\partial_\mu(\hat{r}_\lambda-u_\lambda)\cdot\partial_\nu(\hat{r}_\tau-u_\tau),\tag{25}$$

其中 $\hat{r}_\mu=r_\mu/R$.

利用 (22) 及 $\hat{r}_\nu-u_\nu=a_{\mu\nu}n_\nu$，(25) 式又可改写为

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x)=g\epsilon_{ijk}n_k\left\{\partial_\mu n_i+\hat{r}_\mu\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{W})}{u_0+1}\right]_i\right\}\left\{\partial_\nu n_j+\hat{r}_\nu\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{W})}{u_0+1}\right]_j\right\},\tag{26}$$

这里

$$\partial_\mu n_i + r_\mu \left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{W})}{u_0+1}\right]_i = (\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{\mu\nu} + r_\mu W_\nu) a_{j\nu}/R, \tag{27}$$

所以 (26) 式又可改写为

$$F^{(m)}_{\mu\nu}(x) = \frac{g}{R^2} e_{ijk} n_k (\delta_{il} - n_i n_l)(\delta_{\mu\nu} + r_\mu W_\nu) a_{l\nu} \cdot (\delta_{jm} - n_j n_m)(\delta_{\nu\lambda} + r_\nu W_\lambda) a_{j\lambda}. \tag{28}$$

(18)、(23)、(25)、(26)、(28) 式给出了磁单极场强的各种表式. 这些不同形式的表达式可能为寻找拉氏函数提供一些线索. 还可做为磁单极势正确性的判据.

(三) 磁单极势的积分形式

为了将理论纳入拉氏形式，最简单的方法是使场强 $F^{(m)}_{\mu\nu}$ 与势 $A^{(m)}_\mu$ 满足通常的关系

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{29}$$

杨振宁等应用纤维丛理论解决了这个问题[2]. 但只讨论了静止磁单极的情形. 我们用路径积分的方法来重新定义矢量势也可实现这一点. 且可以推广到运动磁单极情形.

定义

$$A^{(L)}_\mu(x) = \int_L F^{(m)}_{\mu\nu}(x-a)\,da_\nu, \tag{30}$$

上式中，L 是从无穷这点到零点的类空曲线. (30) 可改写为

$$\mathbf{A}^{(L)}(x) = \int_L [d\mathbf{a}\times\mathbf{H}(x-a) + da_0\mathbf{E}(x-a)], \tag{31}$$

$$\varphi^{(L)}(x) = \int_L d\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}(x-a). \tag{32}$$

由 (8) 及 (30) 易证

$$\partial_\mu A^{(L)}_\mu(x) = 0. \tag{33}$$

可以证明

$$\begin{aligned}&\partial_\mu A^{(L)}_\nu(x) - \partial_\nu A^{(L)}_\mu(x)\\ &= F^{(m)}_{\mu\nu}(x) - i\frac{4\pi g}{c} e_{\mu\nu\rho\sigma}\int_L da_\rho v_\sigma\left(t-\frac{a_0}{c}\right)\delta^3\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_m\left(t-\frac{a_0}{c}\right)-\mathbf{a}\right],\end{aligned} \tag{34}$$

这里已假定在无穷远处 $F^{(m)}_{\mu\nu}(x)=0$. 由 (34) 可见，当 $\mathbf{x}-\mathbf{x}_m\left(t-\frac{a_0}{c}\right)$ 在积分路径 L 上时，右边第二项不为零. 这就是所谓 Dirac 弦的贡献. 此时通常的场强与位势的关系不成立. 即得不到(29)式. 如果取不同的路径 L_1, L_2, 但有相同的起终点，则

$$\begin{aligned}&A^{(L_1)}_\mu(x) - A^{(L_2)}_\mu(x)\\ &= \partial_\mu\alpha_S - \frac{i2\pi g}{c} e_{\mu\nu\sigma\tau}\iint_S d\sigma_{\nu\sigma} v_\tau\left(t-\frac{a_0}{c}\right)\delta^3\left[\mathbf{x}-\mathbf{x}_m\left(t-\frac{a_0}{c}\right)-\mathbf{a}\right].\end{aligned} \tag{35}$$

其中

$$\alpha_S = -\frac{1}{2}\iint_S d\sigma_{\nu\sigma} F_{\nu\sigma}(x-a), \tag{36}$$

$d\sigma_{\nu\sigma}$ 为 a_μ 空间的面元，S 为 L_1、L_2 为边界的任意曲面. 由于 S 的任意性，我们总可选择

S，使 $\mathbf{x}-\mathbf{x}_m\left(t-\frac{a_0}{c}\right)$ 不在曲面 S 上. 此时 (35) 化为

$$A_\mu^{(L_1)}(x) - A_\mu^{(L_2)}(x) = \partial_\mu \alpha_S, \tag{37}$$

即不同路径定义的势只差一规范变换.

如果我们选择 L 沿 a_3 轴，可定义两种势:

$$\begin{aligned} A_\mu^{(a)}(x) &= \int_{-\infty}^0 da_3 F_{\mu 3}^{(m)}(x-a), \\ A_\mu^{(b)}(x) &= \int_{\infty}^0 da_3 F_{\mu 3}^{(m)}(x-a), \end{aligned} \tag{38}$$

易证

$$\partial_\mu A_\mu^{(a)}(x) = \partial_\mu A_\mu^{(b)}(x) = 0, \tag{39}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu A_\nu^{(a)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(a)}(x) \\ &\quad = F_{\mu\nu}^{(m)}(x) - i\frac{4\pi g}{c}\epsilon_{\mu\nu 3\rho} v_\rho(t)\delta[x_1 - x_1^m(t)]\delta[x_2 - x_2^m(t)]\theta[-x_3 + x_3^m(t)] \\ &\partial_\mu A_\nu^{(b)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(b)}(x) \\ &\quad = F_{\mu\nu}^{(m)}(x) + i\frac{4\pi g}{c}\epsilon_{\mu\nu 3\rho} v_\rho(t)\delta[x_1 - x_1^m(t)]\delta[x_2 - x_2^m(t)]\theta[x_3 - x_3^m(t)] \\ &\partial_\mu(A_\nu^{(a)} - A_\nu^{(b)}) - \partial_\nu(A_\mu^{(a)} - A_\mu^{(b)}) \\ &\quad = -i\frac{4\pi g}{c}\epsilon_{\mu\nu 3\rho} v_\rho(t)\delta[x_1 - x_1^m(t)]\delta[x_2 - x_2^m(t)]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

如果将坐标原点选在磁单极上，由 (40) 第一式，弦的贡献在负 z 轴上. 第二式弦的贡献在正 z 轴上，所以可定义下面的区域

$$R_a:\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)| > 0,\quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} + \delta,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

$$R_b:\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)| > 0,\quad \frac{\pi}{2} - \delta < \theta \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

$$R:\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)| > 0,\quad \frac{\pi}{2} - \delta < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

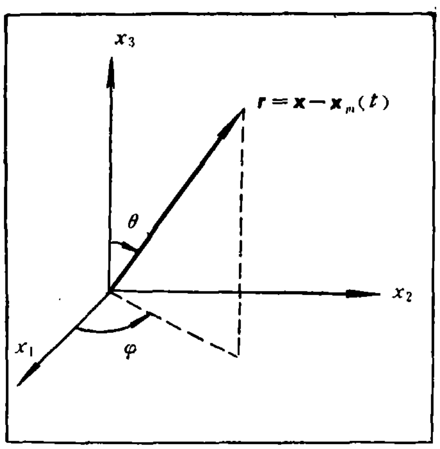

图 1

其中 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. θ, φ 定义见图1.

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)/|\mathbf{x}-\mathbf{x}_m(t)| = \mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta.$$

由 (40) 易见

$$\partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)} = F_{\mu\nu}^{(m)}(x),\quad 当\ x\in R_a, \tag{41}$$

$$\partial_\mu A_\nu^{(b)} - \partial_\nu A_\mu^{(b)} = F_{\mu\nu}^{(m)}(x),\quad 当\ x\in R_b, \tag{42}$$

$$\partial_\mu(A_\nu^{(a)} - A_\nu^{(b)}) - \partial_\nu(A_\mu^{(a)} - A_\mu^{(b)}) = 0,\ 当\ x\in R,$$

故有

$$A_\mu^{(a)} - A_\mu^{(b)} = \partial_\mu \alpha(x),\qquad 当\ x\in R, \tag{43}$$

及

$$\alpha(x)=\int_{x_0}^{x} dx'_\mu[A_\mu^{(a)}(x')-A_\mu^{(b)}(x')],\qquad x,\ x_0\in R. \tag{44}$$

在重迭区 R 内绕磁荷一周 $\alpha(x)$ 的改变为

$$\oint dx_\mu[A_\mu^{(a)}(x)-A_\mu^{(b)}(x)]=\frac{1}{2}\oiint_S d\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=4\pi g, \tag{45}$$

其中 S 为包围磁荷的封闭曲面.

(41—45) 式即杨振宁过去给出的条件. 这里我们从积分定义的势出发得到了. 由上可见,引入 R_a, R_b 后,场强与势满足通常的关系(29),理论便易于纳入拉氏形式.

(四) 静止和匀速运动磁单极场强和势的显示表达式

我们先给出场强,再由积分形式求出势的显示表达式

(1) 磁单极静止的情形.

设磁单极静止于坐标原点,即 $\mathbf{x}_m(t)=0$, 由 (18) 式立刻得到

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x)=g\epsilon_{\mu\nu\sigma4}\frac{x_\sigma}{r^3}\quad r=|\mathbf{x}|, \tag{46}$$

或

$$\mathbf{E}_m(x)=0\quad \mathbf{H}_m(x)=g\frac{\mathbf{x}}{r^3}. \tag{47}$$

将 (46) 代入 (38) 式有

$$\begin{aligned}A_\mu^{(a)}(x)&=g\epsilon_{\mu3\sigma4}x_\sigma\int_{-\infty}^{0}\frac{da_3}{[x_1^2+x_2^2+(x_3-a_3)^2]^{3/2}}\\&=g\frac{\epsilon_{\mu\nu34}x_\nu}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{x_3}{r}-1\right)\\&=-g\left(\frac{x_3}{r}-1\right)\partial_\mu\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right),\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}A_\mu^{(b)}(x)&=g\epsilon_{\mu3\sigma4}x_\sigma\int_{\infty}^{0}\frac{da_3}{[x_1^2+x_2^2+(x_3-a_3)^2]^{3\lambda}}\\&=g\frac{\epsilon_{\mu\nu34}x_\nu}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{x_3}{r}+1\right)\\&=-g\left(\frac{x_3}{r}+1\right)\partial_\mu\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right).\end{aligned} \tag{49}$$

(48)、(49) 又可改写为

$$\begin{cases}\mathbf{A}^{(a)}(x)=g\dfrac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{\varphi},\quad A_4^{(a)}(x)=0,\\[2ex]\mathbf{A}^{(b)}(x)=-g\dfrac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{\varphi},\quad A_4^{(b)}(x)=0,\end{cases} \tag{50}$$

这正是早已熟知的形式. 由 (48)、(49) 可得

$$A_\mu^{(a)}(x)-A_\mu^{(b)}(x)=\partial_\mu\alpha(x), \tag{51}$$

其中

$$\alpha(x)=2g\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

(48)、(49)是Dirac弦沿 z 轴的情形.

(2) 磁单极作匀速运动的情形

设磁单极的速度为 $\mathbf{v}$, 则

$$\mathbf{x}_m(t)=\mathbf{v}t. \tag{52}$$

代入(18)式立刻得到

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x)=-i\frac{g}{R^3}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}r_\rho u_\sigma=-i\frac{g}{R^3}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R_\rho u_\sigma. \tag{53}$$

其中

$$\begin{aligned} r_\mu&=x_\mu-v_\mu t+v_\mu\frac{r}{c},\\ R_\mu&=r_\mu-Ru_\mu=x_\mu+(x_\sigma u_\sigma)u_\mu. \end{aligned} \tag{54}$$

代入(38)得

$$\begin{aligned} A_\mu^{(a)}(x)&=-ig\epsilon_{\mu3\rho\sigma}R_\rho u_\sigma\int_{-\infty}^{0}\frac{da_3}{[R^2-2R_3a_3+(1+u_3^2)a_3^2]^{3/2}}\\ &=-ig\frac{\epsilon_{\mu3\rho\sigma}R_\rho u_\sigma}{R_3^2-(1+u_3^2)R^2}\left(\frac{R_3}{R}-\sqrt{1+u_3^2}\right), \end{aligned} \tag{55}$$

$$A_\mu^{(b)}(x)=-ig\frac{\epsilon_{\mu3\rho\sigma}R_\rho u_\sigma}{R_3^2-(1+u_3^2)R^2}\left(\frac{R_3}{R}+\sqrt{1+u_3^2}\right). \tag{56}$$

易证

$$A_\mu^{(a)}(x)-A_\mu^{(b)}(x)=\partial_\mu\alpha(x), \tag{57}$$

$$\alpha(x)=2g\tan^{-1}\frac{(u_0^2-u_1^2)(x_2-v_2t)+u_1u_2(x_1-v_1t)}{u_0\sqrt{1+u_3^2}(x_1-v_1t)}. \tag{58}$$

以上是匀速运动磁单极的 Dirac 弦也平行于实验室系 z 轴的情形. 为了与(48)、(49)式比较, 我们需要研究在磁单极静止系 Dirac 弦平行于 z 轴的情形. 此时相对实验室系 Dirac 弦不再平行于 z 轴. 积分变量 a_μ 可写为:

$$a_\mu=aS_\mu,\quad a \text{ 为实数},$$

$$S_\mu=a_{3\mu},\quad S_\mu S_\mu=S^2=1,$$

$a_{3\mu}$ 即从实验室系到磁荷静止系的 Lorentz 变换, 具体表式见(20). 显然, 过渡到磁荷静止系时,

$$a_\mu\to a'_\mu=a_{\mu\nu}a_\nu=aa_{\mu\nu}a_{3\nu}=a\delta_{\mu3}=(0,0,a'_3,0)$$

正好是 Dirac 弦沿 z' 轴的情形.

在实验室坐标系, 由(30):

$$\begin{aligned} A_\mu^{(a)}(x)&=\int_{-\infty}^{0}F_{\mu\nu}^{(m)}(x-aS)da_\nu\\ &=-ig\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R_\rho u_\sigma S_\nu\int_{-\infty}^{0}\frac{da}{[R^2-2Rn_3a+a^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{g}{R}\frac{\epsilon_{ij3}a_{i\mu}n_j}{n_1^2+n_2^2}(n_3-1) = -g(n_3-1)\partial_\mu \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \tag{59}$$

$$A_\mu^{(b)}(x) = \int_\infty^0 F_{\mu\nu}^{(m)}(x-aS)\,da_\nu = \frac{g}{R}\frac{\epsilon_{ij3}a_{i\mu}n_j}{n_1^2+n_2^2}(n_3+1)$$

$$= -g(n_3+1)\partial_\mu \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \tag{60}$$

其中 $n_i(i=1,2,3)$ 见(21)．易证

$$A_\mu^{(a)}(x) - A_\mu^{(b)}(x) = \partial_\mu \alpha(x), \tag{61}$$

$$\alpha(x) = 2g\tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{62}$$

可以看到，(59)、(60)与静止情形(48)、(49)形式相似，它们只相差一个 Lorentz 变换．这说明，当势采用分区描述时，在匀速运动时，其势可通过 Lorentz 变换由静止情形的势得到．

(3) 磁单极作加速运动的情形

前面已经看到，匀速运动的磁单极势完全可以通过 Lorentz 变换从静止磁单极势得到．磁单极做加速运动的情形又怎样呢？我们知道，对于电子，当它做匀速运动时相应的矢势可以通过 Lorentz 变换从电子静止时的势得到．把匀速运动电子矢势表式中所有的量换成推迟时刻的量就得到了加速运动电子的矢势．下面我们将证明，对磁单极用上述方法得不到加速磁单极的势．

检验矢势正确与否的标准是能否给出正确的场强．(26)式中已给出了加速运动磁单极场强的严格表达式．式中的量均为推迟时刻的值．如果象在电子情况一样把(59)式中磁单极作匀速运动的势 $A_\mu^{(a)}(x)$ 表式中的量换成推迟时刻的值，则有

$$A_\mu^{(a)}(x) = \frac{g}{R}\frac{\epsilon_{ij3}a_{i\mu}n_j}{n_1^2+n_2^2}(n_3-1) = A_\mu^{(1)}(x) + A_\mu^{(2)}(x), \tag{63}$$

其中

$$A_\mu^{(1)}(x) = -g(n_3-1)\partial_\mu \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right),\ A_\mu^{(2)}(x) = g(n_3-1)\frac{\epsilon_{ij3}n_i r_\sigma \partial_\mu a_{j\sigma}}{R(n_1^2+n_2^2)}. \tag{64}$$

(26)式可改写为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(m)}(x) &= F_{\mu\nu}^{(1)}(x) + F_{\mu\nu}^{(2)}(x), \\ F_{\mu\nu}^{(1)}(x) &= g\epsilon_{ijk}n_k\partial_\mu n_i \partial_\nu n_j, \\ F_{\mu\nu}^{(2)}(x) &= g\epsilon_{ijk}n_k\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{W})}{u_0+1}\right]_i(\hat{r}_\mu\partial_\nu - \hat{r}_\nu\partial_\mu)n_j. \end{aligned} \tag{65}$$

易证

$$\partial_\mu A_\nu^{(1)} - \partial_\nu A_\mu^{(1)} = F_{\mu\nu}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu^{(2)} - \partial_\nu A_\mu^{(2)} = &-\frac{g}{R}\frac{\epsilon_{ij3}n_i}{n_3+1}\left[\left(\hat{r}_\mu\frac{da_{j\nu}}{d\tau} - \hat{r}_\nu\frac{da_{j\mu}}{d\tau}\right)\right. \\ &\left.+ (\hat{r}_\mu u_\nu - \hat{r}_\nu u_\mu)\hat{r}_\sigma\frac{da_{j\sigma}}{d\tau}\right] \\ &- \frac{g}{(n_3+1)^2}\epsilon_{ijk}n_k(\hat{r}_\mu\partial_\nu n_i - \hat{r}_\nu\partial_\mu n_i)\hat{r}_\sigma\frac{da_{j\sigma}}{d\tau}\end{aligned}$$

$$
-\frac{g}{(n_3+1)^2}\epsilon_{ij3}(\hat{r}_\mu\partial_\nu n_i-\hat{r}_\nu\partial_\mu n_i)\hat{r}_\sigma\frac{da_{j\sigma}}{d\tau}
$$

$$
+\frac{g}{(n_3+1)^2}\epsilon_{ij3}n_i(\hat{r}_\mu\partial_\nu n_j-\hat{r}_\nu\partial_\mu n_j)\hat{r}_\sigma\frac{da_{3\sigma}}{d\tau}, \tag{66}
$$

由此我们可以计算 $\partial_\mu A_\nu^{(a)}-\partial_\nu A_\mu^{(a)}$ 与 $F_{\mu\nu}^{(m)}$ 之差.为简单起见,我们只计算 $\mathbf{u}=0$, $\mathbf{W}\neq 0$ 的情形. 此时,

$$
\Delta_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu^{(a)}-\partial_\nu A_\mu^{(a)}-F_{\mu\nu}^{(m)}=\frac{g}{R(n_3+1)^2}\{i\epsilon_{ij3}n_iW_j(\hat{r}_\mu\delta_{\nu4}-\hat{r}_\nu\delta_{\mu4})
$$

$$
+\epsilon_{ijk}W_jn_k(\hat{r}_\mu\delta_{i\nu}-\hat{r}_\nu\delta_{i\mu})+\epsilon_{ij3}W_j(\hat{r}_\mu\delta_{i\nu}-\hat{r}_\nu\delta_{i\mu})
$$

$$
-\epsilon_{ij3}n_iW_3(\hat{r}_\mu\delta_{j\nu}-\hat{r}_\nu\delta_{j\mu})\}, \tag{67}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\Delta_{12}&=-\frac{g}{R(n_3+1)}(n_1W_1+n_2W_2),\\
\Delta_{13}&=\frac{g}{R(n_3+1)^2}\{-(n_3+1)W_2+n_2(n_1W_1+n_2W_2)\},\\
\Delta_{23}&=\frac{g}{R(n_3+1)^2}\{(n_3+1)W_1-n_1(n_1W_1+n_2W_2)\},\\
\Delta_{14}&=\frac{ig}{R(n_3+1)^2}\{-(n_3+1)W_2+n_1(n_1W_2-n_2W_1)\},\\
\Delta_{24}&=\frac{ig}{R(n_3+1)^2}\{(n_3+1)W_1+n_2(n_1W_2-n_2W_1)\},\\
\Delta_{34}&=\frac{ig}{R(n_3+1)}\{n_1W_2-n_2W_1\}.
\end{aligned} \tag{68}
$$

显然,$\Delta_{\mu\nu}\neq 0$. 这就证明了 (63) 式给出的 $A_\mu^{(a)}(x)$ 不是加速磁单极的势. 也就是说,加速运动的磁单极势不可能象电子一样通过 Lorentz 变换得到. 但从 (68) 式可以看出,当 $\mathbf{W}$ 沿 Z 轴时,$\Delta_{\mu\nu}=0$.

(五) 磁单极势的统一形式

下面,我们尝试用奇异函数给出磁单极势的统一形式.

定义

$$
A_\mu(x)=\theta[x_3-x_3^m(t)]A_\mu^{(a)}(x)+\theta[x_3^m(t)-x_3]A_\mu^{(b)}(x)
$$

$$
+\alpha(x)\partial_\mu\theta[x_3-x_3^m(t)], \tag{69}
$$

易证

$$
\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=F_{\mu\nu}^{(m)}(x). \tag{70}
$$

现在看 (69) 式定义的势 $A_\mu(x)$ 是否满足 Lorentz 条件. 实际上,由 (69),

$$
\partial_\mu A_\mu(x)=\partial_\mu\partial_\mu[\alpha(x)\cdot\theta(x_3-x_3^m(t))] \tag{71}
$$

当

$$
x_3>x_3^m(t)\text{ 时},\ \partial_\mu A_\mu(x)=\Box\alpha(x), \tag{72}
$$

当

$$x_3 < x_3^m(t) \text{ 时}, \quad \partial_\mu A_\mu(x) = 0, \tag{73}$$

所以,只要选择 $\alpha(x)$ 满足 $\square\, \alpha(x) = 0$，则当 $x_3 \neq x_3^m(t)$ 时,(69)式定义的势就满足 Lorentz 条件．但在 $x_3 = x_3^m(t)$ 时，(69) 式定义的 A_μ 不满足 Lorentz 条件．

由第(四)节，对磁单极静止的情形，

$$A_\mu(x) = \theta(x_3)A_\mu^{(a)}(x) + \theta(-x_3)A_\mu^{(b)}(x) + 2g\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\partial_\mu\theta(x_3); \tag{74}$$

对磁单极匀速运动的情形，

$$A_\mu(x) = \theta(x_3')A_\mu^{(a)}(x) + \theta(-x_3')A_\mu^{(b)}(x) + 2g\tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\theta(x_3'). \tag{75}$$

其中

$x_3' = a_{3\nu}x_\nu = x_3 - v_3 t = x_3 - x_3^m(t)$ 为变到磁单极静止系的坐标．

容易看出，(74)、(75) 也只相差一个 Lorentz 变换．

(69) 式定义的 A_μ 可能为描写多个磁单极体系提供一点方便．

参　考　资　料

[1] 侯伯宇，兰州大学学报(自然科学版)，1977，**2**，37．

[2] 杨振宁，*Gauge Fields, Proceedings of the sixth Hawaii Topical Conference in Particle Physics*, (1975), 489.

VARIOUS EXPRESSIONS FOR THE FIELD STRENGTHS OF A MONOPOLE WITH DIFFERENT VELOCITIES AND THE INTEGRAL FORM OF THE POTENTIAL OF A MONOPOLE

Tu Tung-sheng

(The Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Ruan Tu-nan

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

Various expressions for the field strenghs of an accelerated monopole are given. In the integral form, we disscuss the potentials for static, uniformly moving and accelerated monopoles. In the static case, we obtain the Wu-Yang Potential. In the case of constant velocity we obtain a potential which can also be obtained through Lorentz transformation from the Wu-Yang Potential. However, for an accelerated monopole, the correct potential cannot be obtained through Lorentz transformation. On the contrary, the correct Lienard-Wiechert Potential of an accelerated electron can be obtained through Lorentz transformation.