第1卷 第1期　　高能物理与核物理　　Vol. 1, No. 1
1977年11月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　November, 1977

协变谐振子势的介子结构模型

朱重远　安　瑛
（中国科学院数学研究所）

摘　要

本文给出了赝标四维谐振子位势下介子的 Bethe-Salpeter 结构波函数，并用这些波函数，计算了介子的弱电磁过程．结果定性上大体是好的．定量上，没有 π 介子的过程均与实验符合，但有 π 参与的过程则不符，对此，文中作了一些猜测性的解释．

在文[1]中，我们从重层子模型中介子波函数满足的 Bethe-Salpter（以下简称B-S）方程出发，分析了位势近似下波函数及位势的旋量结构．该文中指出：如果要求得到的 $\Gamma(\pi\to l\nu):\Gamma(K\to l\nu)$ 以及 $\Gamma(\rho\to l^+l^-):\Gamma(\omega\to l^+l^-):\Gamma(\varphi\to l^+l^-)$ 与实验符合，波函数的旋量结构及位势受到强烈的限制．

根据文[1]，我们合理地取位势的旋量结构主要为赝标势．在质心系中，介子波函数的旋量结构是

0^- 系列：

$$\phi(x,P)=r_5[f_1+\hat{A}+i\sigma_{4i}f_{4i}] \tag{1}$$

$$A_4\approx-\frac{\mu}{2M}f_1$$

$$\mathbf{A}\approx-\frac{\mu}{2M^3}\partial_4\boldsymbol{\partial}f_1$$

$$f_{4i}\ll f_1$$

1^- 系列：

$$\phi(x,P)=[S+\hat{B}r_5+\hat{\phi}^V+2ig_{4i}\sigma_{4i}+\sigma_{ij}\epsilon_{ijk}g_k] \tag{2}$$

$$\mathbf{B}\approx\frac{2}{M}(\boldsymbol{\partial}\times\mathbf{g}_4)$$

$$\phi_4^V\approx-\frac{\mu}{M^3}\partial_4\boldsymbol{\partial}\cdot\mathbf{g}_4$$

$$\boldsymbol{\phi}^V\approx\frac{\mu}{M}\mathbf{g}_4$$

$$\mathbf{g}\ll\mathbf{g}_4$$

$$S\ll\mathbf{g}_4$$

$$\mathbf{g}_4=g\mathbf{e}$$

本文1977年7月30日收到．

$\mathbf{e}$ 是矢量介子的极化矢量

f_1 和 g 满足的方程可以写为[1]

$$\left(M^2 + V(x) - \partial^2 - \frac{1}{4}\mu^2\right) f_1 = 0 \tag{3}$$

$$\left(M^2 + V(x) - \partial^2 - \frac{1}{4}\mu^2 + \frac{1}{4}\Delta\right) g = 0 \tag{4}$$

各式中，μ 是介子质量，M 是层子质量，Δ 是给出 0^- 及 1^- 介子质量分裂的待定参数．注意 (1) 式及 (2) 式就旋量结构而言，与文[2]中提出的相近．

为了求出 $f_1(x)$ 及 $g(x)$，需要知道位势 $V(x)$ 的形式．鉴于有许多迹象表明，决定层子在介子内的运动状况的位势在介子内变化比较小(近平底)，因此，一个自然的设想是取位势为谐振子型

$$V(x) = a + bx^2 \tag{5}$$

将 (5) 式代入 (3) 式，在质心系中求解，得

$$f_1 = N_{nl} e^{-\frac{\omega}{2}(t^2+r^2)} H_{n_4}(\sqrt{\omega}\, t) r^l Y_m^l(\theta, \varphi) L_n^{l+\frac{1}{2}}(\omega r^2) \tag{6}$$

能级为

$$\mu_{0^-}^2 = 4(M^2 + a) - 4\omega(2n_4 + 1) + 4\omega(4n + 2l + 3) \tag{7}$$

$$\omega = \sqrt{b}$$

其中 n 是径向量子数，l 是角量子数．N_{nl} 是归一化常数．H_{n_4} 是厄米多项式，$L_n^{l+\frac{1}{2}}$ 是广义拉盖尔多项式．n_4 是相对时间激发的量子数，其物理意义至今不明．为了避开负能的相对时间激发，我们认为，现在发现的强子态都是 $n_4 = 0$ 的态．下面将只讨论这种态．

将 (6) 式归一化，变换到粒子动量为 P 的参考系中，结果有

$$\begin{aligned} f_1 = {} & \frac{1}{\sqrt{2\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}(-1)^l - \frac{\omega}{2}x^2 - \frac{\omega}{\mu^2}(P\cdot x)^2} E^{lm}_{\mu_1\cdots\mu_l}(P) L_n^{l+\frac{1}{2}}\left[\omega\left(x^2 + \frac{(P\cdot x)^2}{\mu^2}\right)\right] \\ & \times \frac{\omega^{1+\frac{l}{2}}}{\sqrt{n!\,\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}} \frac{2^{|m|/2}(2l-1)!!}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi(l+m)!(l-m)!}} \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $E^{lm}_{\mu_1\cdots\mu_l}(P)$ 是极化张量．

完全相同的计算应用于 (4) 式，可以证明

$$g\text{ 的函数形式} = \frac{1}{2} f_1 \text{ 的函数形式} \tag{9}$$

1^- 系列介子的质量本征值为

$$\mu_1^2 = \Delta + 4(M^2 + a) - 4\omega(2n_4 + 1) + 4\omega(4n + 2l + 3) \tag{10}$$

下面分别讨论 (7)—(10) 式的一些应用．

一、质 量 谱

由 (7) 式及 (10) 式可以看到对 $n_4 = 0$，n 相同的态，介子质量的平方与轨道角动量 l 成直线关系，这正好是著名的直线 Regge 轨迹，如果假定 (5) 式中位势的参数 b 近似

$SU(3)$ 对称，则这些 Regge 直线的斜率就大体相同．位势参数 a 是 $(-M^2)$ 量级，它也基本上 $SU(3)$ 对称，但可以有一个介子质量量级的小的 $SU(3)$ 破坏，给出观察到的介子质量．注意 (7) 和 (10) 式中出现的都是介子质量的平方，这自然地解释了为什么介子质量式是平方关系．

从 π 介子及其 $l=2$ 的激发 A_3 介子的质量，可以定出

$$\omega \approx 0.166\ \mathrm{GeV}^2 \tag{11}$$

本节的结果与用瞬时谐振子势的结果相同[3]．

二、$0^- \to l\nu$ 过程

应用 (8) 式，可以求出 $\pi \to \mu\nu$ 及 $K \to \mu\nu$ 衰变的形状因子 f_K 及 f_π，它们满足

$$\frac{f_K}{f_\pi} = \frac{\omega(K)}{\omega(\pi)} \approx 1 \tag{12}$$

这与实验符合．有趣的是，如果用 π 及 K 的 Regge 轨迹分别定出的 $\omega(K)$ 及 $\omega(\pi)$，则有

$$\frac{f_K}{f_\pi} \approx 1.08 \tag{13}$$

与实验结果几乎完全一致．

三、$\pi^\pm$ 介子的电磁形状因子

取层子的电磁作用不含反常磁矩，应用本文的波函数可以求出带电 π^+ 介子的形状因子为

$$C_\pi(q^2) = \left(2 - \frac{1}{1+\frac{q^2}{2\mu^2}}\right) \frac{e^{-q^2/16\omega(1+q^2/2\mu^2)}}{\left(1+\frac{q^2}{2\mu^2}\right)} \tag{14}$$

大 q^2 时，$C_\pi(q^2) \sim (q^2)^{-1}$，定性行为与实验一致．这与 R. P. Feymann 等的结果[5]不同．(他们给出的形状因子随 q^2 增加而指数式上升，与实验完全不符)．不过，定量上看，由于 (14) 式中的 μ^2 是 π 介子质量平方，是很小的，所以，$C_\pi(q^2)$ 将很快下降．实验上观察到的 $2\mu^2$ 约为 $0.56\ \mathrm{GeV}^2$，比 (14) 式给出的要大得多．

四、$K \to \pi l\nu$ 过程

计算给出

$$\langle \pi | j_\mu^{W.K.}(0) | K \rangle = \frac{-i}{\sqrt{4E_K E_\pi}} e^{-\frac{m_K^2+m_\pi^2}{16\omega}+\frac{m_K^2 m_\pi^2}{4\omega(m_K^2+m_\pi^2+q^2)}}$$

$$\cdot \frac{2m_K m_\pi}{m_K^2+m_\pi^2+q^2} \left\{ \frac{m_K^2+m_\pi^2+2q^2}{m_K^2+m_\pi^2+q^2}(P^K+P^\pi)_\mu + \frac{m_K^2-m_\pi^2}{m_K^2+m_\pi^2+q^2}(P^K-P^\pi)_\mu \right\} \tag{15}$$

用这个矩阵元,用文[4]的办法估算衰变速率,得到

$$\tau(K^+ \to \pi\mu^+\nu) = 1.8 \times 10^6 \text{ 秒}^{-1}$$

$$\tau(K^+ \to \pi e^+\nu) \approx 2.2 \times 10^6 \text{ 秒}^{-1}$$

实验值分别为 $(2.58 \pm 0.7) \times 10^6$ 秒$^{-1}$ 和 $(3.90 \pm .04) \times 10^6$ 秒$^{-1}$,数量级符合,定量看,则理论值偏小. 用(16)式计算参数得 $\xi(0) = 0.85$. 实验上用不同的方法测得的结果相差很大,甚至符号也有不同. 不过大部分实验给出的 ξ 是负的,与理论不符.

五、$\rho \to l^+l^-$ 过程

对 $\Gamma(\rho \to e^+e^-) : \Gamma(\omega \to e^+e^-) : \Gamma(\varphi \to e^+e^-)$,由于这里的波函数符合文[1]中提出的要求,所以结果与实验符合.

六、$1^- \to 0^-\gamma$ 过程

对这类过程,算出的衰变几率及与实验比较的情况见下表:

总结上面的讨论,我们看到,由于协变谐振子势是相对论性的,因此,本文的模型是相对论性的模型,可以用来算相对论性的过程. 从结果看,有一些突出的优点,如:给出了平行的直线 Regge 轨迹;对 $\pi^\pm$ 的电磁形状因子给出了正确的定性行为;对于 $1^- \to 0^-\gamma$,(0^- 不为 π)给出了正确的几率;对 $0^- \to l\nu$ 及 $1^- \to l\nu$,几率比与实验符合.

$1^- \to 0^-\gamma$ 衰变宽度

	理论值(KeV)	实验值(KeV)
$K^{*+} \to K^+\gamma$	23	< 80
$K^{*0} \to K^0\gamma$	94	75 ± 35
$\omega \to \eta\gamma$	3.8	< 50
$\varphi \to \eta\gamma$	67	65 ± 15
$\rho^0 \to \eta\gamma$	31	< 160
$\omega \to \pi^0\gamma$	66	870 ± 61
$\rho^0 \to \pi^0\gamma$	7.5	
$\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma$	8.0	35 ± 10
$\varphi \to \pi^0\gamma$	0.27	5.9 ± 2.1

不过,单用上述四维谐振子势还有一些理论及实验的问题,如:B-S 方程的相对时间激发解问题;得到的波函数不满足谱条件的问题;对 $0^- \to l\nu$ 及 $1^- \to l^+l^-$,这里给出了正确的几率比,但由于本文采用的位势参数很少,用绝对速率可以定出作为参数的层子质量,结果数值太小(0.8 GeV 左右). 这个问题,可以用引入 $(P \cdot x)^2$ 的位势或位势旋量结构中增加 $\hat{P} \cdots 1$ 之类的项解决;对有 π 参加的过程,所得的结果比实验要小,这可能是由于 π 质量太小,对称性破坏太厉害所造成,也可能是由于谐振子势只是在原点附近比较好,远处就比较差. 对于有 π 参加的过程,起作用的波函数重叠积分里,不仅是原点附近的波函数,而且远处的波函数也起重要的作用,这样计算的结果就与实际情况有较大的偏离. 所以,谐振子势虽然可能确实抓住了目前实验上已看到的一部分突出的特点,但要对强子结构及其动力学有比较完全的了解,还要做大量的分析工作.

何祚庥和吴詠时同志参加了本文的部分工作,并进行了不少讨论,特此誌谢.

参　考　资　料

[1] 朱重远，安瑛，介子 D-S 波函数及层子间位势的旋量结构，中国科学(待发表).
[2] C. H. Llewellyn Smith *Ann. Phys.*, **53** (1969), 521.
[3] 胡宁，物理学报，**25** (1976) 65.
[4] R. E. Marshak, Riazuddin and C. P. Ryan, ''Theory of Weak Interactions in Particle Physics'' (1969).
[5] R. P. Feymann, ''Photon-Hadron Interactions'' (1972), 124.

A MODEL OF THE STRUCTURE OF MESONS WITH A COVARIANT OSCILLATOR POTENTIAL

CHU CHUNG-YUAN　　AN ING
(*Institute of Mathematics, Acadamia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper the internal wave functions of mesons are obtained by solving the Bethe-Salpeter equation with a pseudoscalar covariant oscillator potential. The transition probabilities of various weak and electromagnetic processes of mesons are calculated by using these wave functions. The results are qualitatively in agreement with experiments. Quantitatively the results given are in good agreements with experiments for processes not involving π mesons, but are not so for processes involving π mesons, for which we give some speculative explanations.