

标量耦合的矢量介子结构波函数

王明中 郑希特 先鼎昌 汪克林 章正刚
(成都工学院) (中国科学院高能物理研究所) (成都地质学院)

摘 要

本文讨论了层子间通过标量耦合的“近平底势”作用而形成矢量介子的问题。利用数字求解旋量的层子-反层子束缚态的B-S方程,得到不同参数情况下的矢量束缚态的结构波函数。判明了各分量之大小及高次分波的影响,还判明了Bargman-Wigner近似适用的条件。

一、引 言

在前面的两篇工作中^[1,2],利用B-S方程在假设了一定的相对论性唯象势的情况下,研究了层子-反层子形成赝标束缚态的情形,并且指出:在“近平底势”情形下^[2],这束缚态可能给出物理的赝标介子(π 介子)来。本文讨论在同样的“近平底势”下层子-反层子形成矢量束缚态的可能。

对B-S方程的处理方法同工作[1],势的选择为工作[2]中采用的“近平底势”,利用DJS-6电子计算机完成数字计算。结果是(i)在标量耦合的“近平底势”下,B-S方程有矢量束缚态的解。(ii)各洛仑兹不变函数对总的矢束缚态波函数的贡献是随束缚的松紧与耦合的强弱(*)而变化的。在强耦合极限下,只保持一、三、五不变函数而略去其它是较好的近似。(iii)在强耦合极限下只保留四维球谐函数的最低次分波是合理的近似,在耦合弱时一般则不能略去。(iv)判明了矢介子束缚态波函数满足Bargman-Wigner方程的条件。

二、核 函 数

层子-反层子(设它们的质量均为 M)的旋量-旋量B-S方程为

$$\begin{aligned} & \left[i \left(\frac{\hat{q}}{2} + \hat{P} \right) + M \right] \chi_q(P, f) \left[-i \left(\frac{\hat{q}}{2} - \hat{P} \right) + M \right] \\ & = - \int d^4K U(q, P - K) \chi_q(K, f) \end{aligned} \quad (1)$$

本文1977年8月11日收到。

(*) 我们区别耦合的“强弱”与束缚的“松紧”两个概念如下:束缚态的质量亏损越大,则耦合越强,而束缚态的介子半径越大,则说束缚越松。详见正文讨论。

这里 $\chi_q(P, f)$ 为动量空间矢介子波函数, P 为层子-反层子的相对动量, f 为极化矢量, U 为唯象的“近平底势”^[2]

$$U(P) = - \frac{iG^2}{(2\pi)^4} \left(\frac{a_1}{P^2 + \beta_1^2 N^2} + \frac{a_2}{P^2 + \beta_2^2 N^2} + \cdots + \frac{a_l}{P^2 + \beta_l^2 N^2} \right) \quad (2)$$

相应的

$$V(\mathbf{r}) = - \frac{G^2}{4\pi r} (a_1 e^{-\beta_1 N r} + a_2 e^{-\beta_2 N r} + \cdots + a_l e^{-\beta_l N r}) \quad (3)$$

G^2 为耦合常数, N, a_i, β_i 为常数参量, 为减少参数, 把 β_i 选得是等差的, 本文取 $l = 10$, $\beta_1 = 1, \beta \equiv \beta_{i+1} - \beta_i = 2 (i = 1, \cdots, l-1)$, 对 a_i 提出如下要求: $V(\mathbf{r})$ 在零点不奇异而取有限值 $V(0)$, 从底要平的要求令 $V(\mathbf{r})$ 在零点的 $(l-2)$ 次导数为零, 于是

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^l a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^l a_i \beta_i = 4\pi V(0)/NG^2 \\ \sum_{i=1}^l a_i \beta_i^2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l a_i \beta_i^{l-1} = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

便是确定 a_i 值的代数联立方程。由于 $V(0)$ 本身的价值未预先给出, 可把 (4) 式全除以 $4\pi V(0)/NG^2$, 重新定义

$$a'_i = \frac{NG^2}{4\pi V(0)} a_i \quad (5)$$

那么 a'_i 可由代数联立方程解出, 它们是正负相间的, 所以“近平底势”实际是由许多吸引与排斥的汤川势迭加而得的。决定势的参数只有 N, l, β 。阱深 $V(0)$ 与耦合常数 G^2 将以一定的形式组合, 由积分方程中作为特征值解出。

在介子质心系中进行计算, 引入

$$Q = (0, 0, 0, m/2) \quad (6)$$

m 为束缚态质量。对 (1) 完成对 P, K 的 Wick 旋转^[3], 得到

$$\begin{aligned} \chi_q(P, f) = i \int d^4 K [(M^2 + P^2 - Q^2)^2 + 4(P \cdot Q)^2]^{-1} & (i\hat{P} - \hat{Q} - M) \\ & \cdot U(Q, P - K) \chi_q(K, f) (i\hat{P} + \hat{Q} - M) \end{aligned} \quad (7)$$

根据协变性要求, 矢介子波函数展成洛仑兹不变函数的最普遍形式为^[4]

$$\chi_q(P, f) = \sum_{i=1}^8 \chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) M^{(i)}(P, Q, f) \quad (8)$$

这里 $(\gamma_\mu$ 及 $\sigma_{\mu\nu}$ 同 [1] 采用的表示)

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= i(P \cdot f) & M^{(2)} &= (P \cdot f) \hat{Q} & M^{(3)} &= (P \cdot f) \hat{P} \\ M^{(4)} &= i(P \cdot f) Q_\mu P_\nu \sigma_{\mu\nu} & M^{(5)} &= \hat{f} & M^{(6)} &= i \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} f_\mu Q_\nu P_\rho \gamma_\tau \gamma_5 \\ M^{(7)} &= i f_\mu Q_\nu \sigma_{\mu\nu} & M^{(8)} &= i f_\mu P_\nu \sigma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (9)$$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}$ 为全反称张量, $\epsilon_{1234} = 1$. 为得到 $\chi^{(i)}$ 所满足的方程, 引入矩阵 $\tilde{M}^{(i)[4]}$, 要求

$$Tr[\tilde{M}^{(i)}(P, Q)M^{(i)}(P, Q)] = \delta_{ij} \quad (10)$$

则有

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(1)} &= -\frac{i}{4(P \cdot f)} \\ \tilde{M}^{(2)} &= \frac{1}{4Q^2(P \cdot f)} \{ \hat{Q} + (P \cdot Q)D[(P \cdot Q)\hat{Q} - Q^2\hat{P} + Q^2(P \cdot f)\hat{f}] \} \\ \tilde{M}^{(3)} &= \frac{D}{4(P \cdot f)} \{ -(P \cdot Q)\hat{Q} + Q^2\hat{P} - Q^2(P \cdot f)\hat{f} \} \\ \tilde{M}^{(4)} &= -\frac{iD}{4} \left\{ \frac{1}{(P \cdot f)} Q_\mu P_\nu \sigma_{\mu\nu} + f_\mu Q_\nu \sigma_{\mu\nu} \right\} \\ \tilde{M}^{(5)} &= \frac{1}{4}\hat{f} + \frac{D}{4}(P \cdot f) \{ (P \cdot Q)\hat{Q} - Q^2\hat{P} + Q^2(P \cdot f)\hat{f} \} \\ \tilde{M}^{(6)} &= \frac{iD}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} f_\mu Q_\nu P_\rho \gamma_\tau \gamma_5 \\ \tilde{M}^{(7)} &= -\frac{iD}{4} \{ (P \cdot f)Q_\mu P_\nu \sigma_{\mu\nu} + P^2 f_\mu Q_\nu \sigma_{\mu\nu} - (P \cdot Q)f_\mu P_\nu \sigma_{\mu\nu} \} \\ \tilde{M}^{(8)} &= \frac{iD}{4} \{ (P \cdot Q)f_\mu Q_\nu \sigma_{\mu\nu} - Q^2 f_\mu P_\nu \sigma_{\mu\nu} \} \end{aligned} \quad (11)$$

这里

$$D = [P^2 Q^2 - (P \cdot Q)^2 - Q^2(P \cdot f)^2]^{-1} \quad (12)$$

把 (8) 代入 (7) 并用 (10) 得到

$$\chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) = \sum_{j=1}^8 F_j(P, Q) \int d^4K U(Q, P - K) H^{ij}(P, Q, K) \chi^{(j)}(K^2, K \cdot Q) \quad (13)$$

这里

$$\begin{aligned} H^{ij}(P, Q, K) &= Tr[\tilde{M}^{(i)}(P, Q)S_-(P, Q)M^{(j)}(K, Q)S_+(P, Q)] \\ F_j(P, Q) &= [(M^2 + P^2 - Q^2)^2 + 4(P \cdot Q)^2]^{-1} \\ S_\pm(P, Q) &= (i\hat{P} \pm \hat{Q}) - M \end{aligned} \quad (14)$$

$i, j = 1, \dots, 8$. 由于 Wick 旋转后的 B-S 方程具有 $O(4)$ 不变性, 所以把 $\chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q)$ 按四维球谐函数(盖根堡函数)展开以分离角量, 考虑到时间反演的不变性有

$$\chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) = \sum_n \chi_n^{(i)}(P, Q) C_n^1(\cos\theta) \quad (15)$$

$$n = \begin{cases} \text{偶数, 如果 } i = 1, 3, 4, 5, 6, 7 \\ \text{奇数, 如果 } i = 2, 8 \end{cases}$$

$C_n^1(\cos\theta)$ 为盖根堡函数, θ 为 P 与 Q 间的夹角. 类似地把势函数也按四维球谐函数展开^[2], 然后利用盖根堡函数的正交性质和求和关系式, 得到

$$\chi_n^{(i)}(P, Q) = G^2 \sum_{j=1}^8 \sum_{n'} \int_0^\infty dK \mathcal{K}_{nn'}^{ij}(P, K, Q) \chi_n^{(j)}(K, Q) \quad (16)$$

这里核函数

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{nn'}^{ij} &= \sum_m \frac{2}{\pi} \frac{(m+1)K^2}{(2\pi)^4} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta C_n^1(\cos\theta) F(P, Q) \\ &\cdot \int dQ' C_m^1(\cos\gamma) H^{ij}(P, K, Q) C_{n'}^1(\cos\theta') L_m \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$L_m = \frac{4}{m+1} \sum_{i=1}^l a_i \frac{(r_i - s_i)^m}{(r_i + s_i)^{m+2}} \quad (18)$$

$$r_i = [(P+K)^2 + (\beta_i N)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$s_i = [(P-K)^2 + (\beta_i N)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$d\Omega'$ 为四维立体角元, γ 为 P, K 间夹角, θ' 为 Q, K 间夹角. 这里所得的核函数和资料[4]中的基本相同, 只是 L_m 具有不同的内容(此处还差常数因子, 但由于要考察高次分波的贡献, 所以还计算了部分高分波的核函数, 这是[4]所没有的). 为了完整, 我们把低次与部分计算中要用到的高次分波(即 n, n' 取最低可能值及较大的分量取较高一次的 n, n' 值)的核函数列于附表之中. 计算中不需要的部分从略.

三、低次分波近似

在本节中, 我们在 Wick 旋转后的动量空间中讨论波函数, 然后在第六节中再变换到位形空间中去. 为数字求解的需要, 如[1]引入无量纲参量

$$E = N/M \quad B = m/2M = Q/M \quad (20)$$

B 直接表征耦合的强弱程度. 相应于[1]的情形, 若取 $M = 10 \text{ GeV}$ 则 π 介子相当于 $B = 0.007$, 而 ρ 介子则为 $B = 0.038$.

用 P', K' 表无量纲动量

$$P' = P/M \quad K' = K/M \quad (21)$$

而以后就略去“.”. 由于 $M^{(i)}$ 具有不同的量纲, 所以 $\chi^{(i)}$ 的量纲也不一致, 实际计算时引入具有相同量纲的不变函数 $F_n^{(i)}$ 如下

$$\begin{aligned} F_n^{(1)} &= M \chi_n^{(1)}(P, B) & F_n^{(2)} &= M^2 \chi_n^{(2)}(P, B) \\ F_n^{(3)} &= M^2 \chi_n^{(3)}(P, B) & F_n^{(4)} &= M^3 \chi_n^{(4)}(P, B) \\ F_n^{(5)} &= \chi_n^{(5)}(P, B) & F_n^{(6)} &= M^2 \chi_n^{(6)}(P, B) \\ F_n^{(7)} &= M \chi_n^{(7)}(P, B) & F_n^{(8)} &= M \chi_n^{(8)}(P, B) \end{aligned} \quad (22)$$

如果只保留最低次分波, 由(15)式可得

$$\begin{aligned} \chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) &= \chi_0^{(i)}(P, Q) \quad \text{如果 } i = 1, 3, 4, 5, 6, 7 \\ \chi^{(i)}(P^2, P \cdot Q) &= \chi_1^{(i)}(P, Q) C_1(\cos \theta) \quad \text{如果 } i = 2, 8 \end{aligned} \quad (23)$$

这时由(8)得

$$\begin{aligned} \chi_Q(P, f) &= iF_0^{(1)}(P \cdot f) + 2B(P \cdot f) \cos \theta F_1^{(2)} \gamma_4 + F_0^{(3)}(P \cdot f) \hat{P} \\ &\quad + iBF_0^{(4)}(P \cdot f) P_\nu \sigma_{4\nu} + F_0^{(5)} \hat{f} + iBF_0^{(6)} \epsilon_{\mu\rho\tau 4} f_\mu P_\rho \gamma_\tau \gamma_5 \\ &\quad + iBF_0^{(7)} f_\mu \sigma_{\mu 4} + i2 \cos \theta F_1^{(8)} f_\mu P_\nu \sigma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (24)$$

核函数经无量纲化处理后仍以 $\mathcal{X}_{nn'}^{ij}$ 表示, 则(16)式导致

$$F_n^{(i)} = \mathbf{G}^2 \sum_{n'} \sum_{j=1}^8 \int_0^\infty dK \mathcal{X}_{nn'}^{ij} F_{n'}^j \quad (25)$$

这里 \mathbf{G}^2 是重新定义的耦合常数

$$\mathbf{G}^2 = \frac{4\pi V(0)}{E} \quad (26)$$

在“近平底势”中的计算把耦合常数作为积分方程(25)的特征值定出后，“近平底势”的阱深， $V(0)$ 亦随之定出。引入

$$x = \frac{(P-1)}{(P+1)} \quad y = \frac{K-1}{K+1}$$

把积分变成高斯求和,问题归结为解线性联立代数方程组

$$F_n^{(j)}(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^8 \sum_{n'} \mathcal{K}_{nn'}^{ij} F_{n'}^j(y_i) \frac{2W_i}{(1-y_i)^2} \quad (27)$$

式中 x_i, y_i 为 $(-1, +1)$ 区间高斯点的取值, W_i 为相应点的权重。在低次分波近似下, $n, n' = 0$ 或 1,

$$\lambda = \mathbf{G}^2/4\pi^2 \quad (28)$$

采用普通迭代法一次求出第一特征值 λ 和相应的 $F_n^{(j)}$ 。计算结果表明：在“近平底势”中矢量束缚态是存在的。

在图 1 中给出 $V(0)$ 在固定 B 时对 E 值的一般依赖关系。从图 1 可看出：对一个确定的 B 值, 当 E 减小时, $V(0)$ 减小。亦即对一个固定质量的束缚态(层子质量固定) E 越小, 束缚将越松, 束缚态的半径将越大。这是因为“近平底势”在 E 减小时其阱宽将随之而加大。但当 E 小于一定值后, $V(0)$ 将随 E 之减小而上升。

在图 1 中还画了一条赝标介子在标量耦合的“近平底势”中的相应曲线(0⁻)与现在的情形(1⁻)相比较,真正的物理势应同时既能形成矢介子 ρ 又能形成赝标介子 π 。图 1 给出 $B = 0.038$ (1⁻) 与 $B = 0.007$ (0⁻) 的确存在交点: $E \doteq 0.35$ 。但在这一 E 值与相应的 $V(0)$ 值下, 给出的 π 介子半径偏小, 这说明单是标量耦合的“近平底势”在上述参量值时还不足以说明 π 和 ρ 介子的形成,

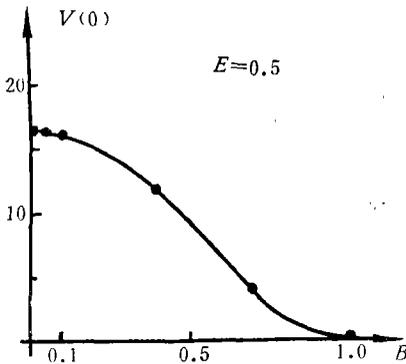


图 2 E 值固定时 $V(0)$ 对 B 的关系

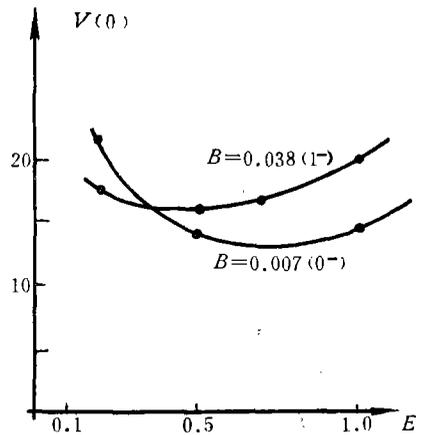


图 1 0⁻ 介子及 1⁻ 介子的 $V(0)$ 值与参量 E 的关系。两条曲线交点的存在, 说明在一定的相同参数下, 可以同时解出 0⁻ 与 1⁻ 束缚态

需要考虑其它形式的耦合, 例如矢量耦合或是混合型的耦合。

在图 2 中给出了 $V(0)$ 在固定 $E = 0.5$ 时对 B 的依赖关系。它表明 $V(0)$ 随 B 之加大而减小。这是合理的, 因为 B 增大即耦合减弱, 耦合常数应随之减小。

图 3 给出波函数 $F_0^{(j)}$ 的图形, $F_1^{(2)}, F_1^{(8)}$ 都很小可以忽略。

试比较图 3(a)与(b), 在 B 大的情况下, 动量空间波函数比 $B = 1$ 时更密集于小 P 范围, 即 B 越大, 动量空间波函数越“瘦”, 那么在位形空间相应的

波函数就越胖, 这反映了 B 越大束缚越弱的特点。

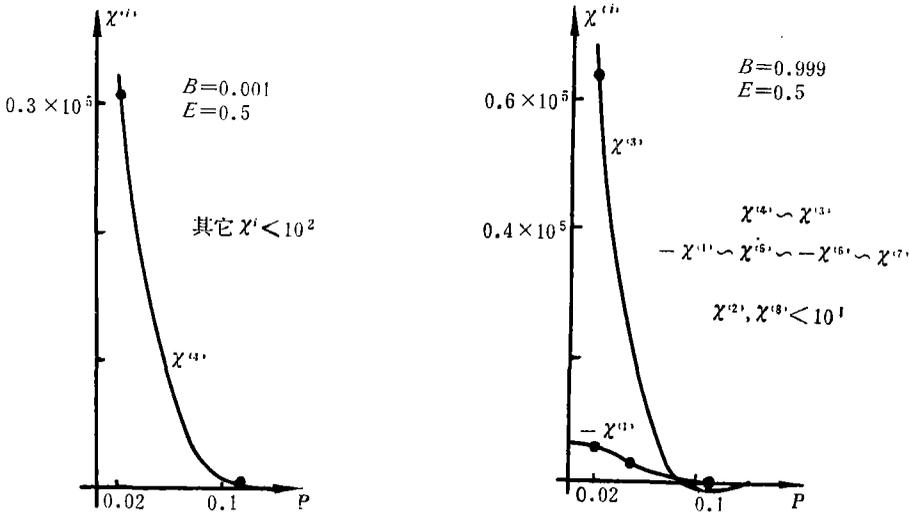


图 3

- (a) $E = 0.5$ 时, 强束缚态 ($B = 0.001$) 的各不变函数的图形
- (b) $E = 0.5$ 时, 弱束缚态 ($B = 0.999$) 的各不变函数的图形

但更清楚的是比较各不变函数对总的波函数的贡献。为此, 看一下 (24) 式就知道: 影响贡献大小的因子有 B 与 P_μ (它当然还依赖于 P 的方向), 为定性判断各项贡献的大小, 取其极大值作比较, 即比较

$$\begin{aligned}
 F^{(1)} &= PF_0^{(1)} & F^{(2)} &= 2BPF_1^{(2)} & F^{(3)} &= P^2F_0^{(3)} & F^{(4)} &= BP^2F_0^{(4)} \\
 F^{(5)} &= F_0^{(5)} & F^{(6)} &= BPF_0^{(6)} & F^{(7)} &= BF_0^{(7)} & F^{(8)} &= 2PF_1^{(8)}
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

图 4 给出 $F^{(i)}$ 在不同参量时的形状。图 4(a) 给出 $E = 0.5$ $B = 0.7$ 的情形。这时 $F^{(5)}$ 、

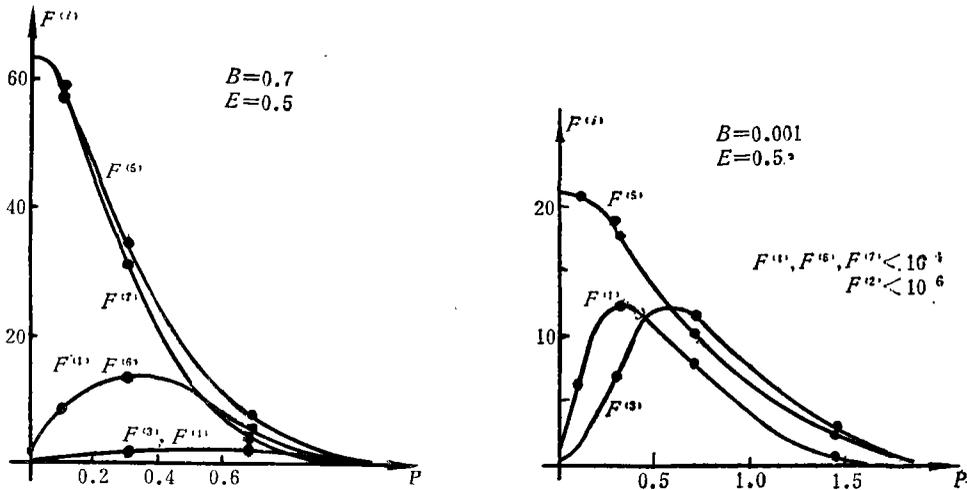


图 4

- (a) $B = 0.7, E = 0.5$ 时各不变函数对束缚态, 波函数的贡献。注意到在弱束缚时, $F^{(5)}$ 及 $F^{(7)}$ 的贡献显著地大于其它各分量的贡献
- (b) $B = 0.001, E = 0.5$ 时各不变函数对束缚态波函数的贡献。对强束缚情况, $F^{(1)}$ 、 $F^{(3)}$ 及 $F^{(5)}$ 是大分量

$F^{(7)}$ 突出地大于所有其它各分量, $F^{(1)}$ 、 $F^{(6)}$ 比它们小一个量级, 而图 4(b) 表明在 $E = 0.5$, $B = 0.001$ 时 $F^{(1)}$ 、 $F^{(3)}$ 、 $F^{(5)}$ 最大, 而 $F^{(4)}$ 、 $F^{(6)}$ 、 $F^{(7)}$ 比它们小二个量级, 其它分量更小.

各分量贡献大小之变化还与参数 E 有关. $F^{(1)}$ 、 $F^{(3)}$ 、 $F^{(5)}$ 在强耦合极限下是主要项这点从 (24) 式已可看出, 因为这极限相当于 $B \rightarrow 0$, 这时, 在较弱耦合时有相当贡献的 $F^{(6)}$ 、 $F^{(7)}$, 由于乘了 B 因子而贡献趋于零了. 资料 [4] 指出一、三、五分量为大分量实际上只适用于强耦合极限.

四、关于 Bargman-Wigner 近似

过去曾假定矢介子波函数满足 Bargman-Wigner 方程^[5,6](以下简称 B-W 方程)

$$(i\hat{Q} + m)\chi_Q(P) = 0 \tag{30}$$

其中

$$\chi_Q(P) = (1 + \gamma_4)\chi_f \tag{31}$$

χ 是 P 的函数. 采用 (31) 式作为矢介子零级近似的波函数, 这种近似常常称之为 B-W 近似. 比较计算的结果, 只有当五、七分量为主, 而其余各分量贡献可以忽略时有 [见 (24) 式]

$$\chi_Q(P) = (F_0^{(5)} + BF_0^{(7)}\gamma_4)\hat{f} \tag{32}$$

从图 4(a) 看当 $E = 0.5$ 、 $B = 0.7$ 时, 在低分波近似下近似地有

$$F_0^{(5)} \approx BF_0^{(7)} \tag{33}$$

这时令 $\chi = F_0^{(5)}$, B-W 近似(31)可以成立, 而从图 4(b)看, 当 $E = 0.5$ 、 $B = 0.001$ 时(33)式显然不成立, B-W 近似就不是一个好的近似. 为了更清楚地判明 B-W 近似成立与否的条件, 我们引入一个判别量 σ

$$\sigma = 1 - \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \frac{(F_{0i}^{(5)} - BF_{0i}^{(7)})^2}{(F_{0i}^{(5)})^2}} \tag{34}$$

这里 $F_{0i}^{(5)}$ 、 $F_{0i}^{(7)}$ 为 $F_0^{(5)}$ 、 $F_0^{(7)}$ 在第 i 个高斯点的计算值. (34) 式可以粗略地反映 $F_0^{(5)}$ 与 $BF_0^{(7)}$ 的接近程度. 当 (33) 式准确成立时, $\sigma = 1$, σ 偏离 1 的程度愈大, 则 B-W 近似越差, 图 5 给出了当 E 一定时 $\sigma(B)$ 的曲线(这里 σ 并没有取全部高斯点计算, 而只取 F^i 贡献较大区域的高斯点来计算, 这对定性地了解已足够了)由它可以看出当 B 较大时(当 $E = 0.5$ $B > 0.5$ 时) B-W 近似较好. B 太小时 B-W 近似就不成立了. 对其它的 E 值, 有类似的结论.

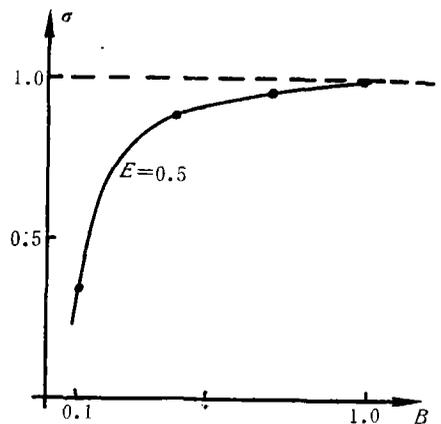


图 5 σ 值与 B 的关系 由图可以看出, 只有对弱束缚态 ($B \sim 1$), Bargman-Wigner 近似才是好的近似

我们知道, 导致 (31) 的假定有两个, (一)是层子在介子质心系中的运动是非相对论性的, $P \ll 1$, (二)介子波函数的旋量部分由层子与反层子作为自由狄拉克粒子的旋量所构成, 并在假定(一)的条件下略去其小分量. 假定(二)是一个值得研究的假定, 因为对一个自由旋量粒子, 当它作非相对论运动时, 其旋量函数的小分量的确可以忽略, 但是层子

在介子质心系中一般说是处于束缚状态而不是一个自由旋量粒子,图5正好说明了这一点, B 很小意味着束缚态的质量亏损很大,因而把介子中层子的旋量结构用自由狄拉克粒子的旋量来近似,必然会有更大偏差.如果取 $E < 0.5$,则类似的曲线将在图5所示 $E = 0.5$ 的曲线之上,取 $E > 0.5$,则在其下,即 E 愈小, B - W 近似可适用于较小的 B 值,这是由于 E 小,则阱宽增大,介子半径增大,有利于前述假定(一),(二)之成立.总的说质量亏损越大(耦合越强),半径越小(束缚越紧), B - W 近似将越差.对重层子来说,如本文选的 $M = 10 \text{ GeV}$, ρ 介子相当于 $B = 0.038$,对 $E = 0.5$ 的情形, B - W 近似不是很好的近似.

五、高次分波的贡献

只有当高次分波的贡献很小时,略去高次分波才是合理的.我们以强耦合极限为例计算了高次分波的贡献.在强耦合极限下(取 $B = 0.001$) $E = 0.5$ 时[见图4(b)]主要贡献为 $F_0^{(1)}$ 、 $F_0^{(3)}$ 、 $F_0^{(5)}$ 三项,因此只考虑它们的高次分波 $F_2^{(1)}$ 、 $F_2^{(3)}$ 、 $F_2^{(5)}$,于是,要解的积分方程为

$$F_n^{(i)} = \mathbf{G}^2 \sum_j \sum_{n'} \int_0^\infty dK \mathcal{K}_{nn'}^{ij} F_{n'}^{(j)} \quad \left(\begin{array}{l} i, j = 1, 3, 5 \\ n, n' = 0, 2 \end{array} \right)$$

计算结果表明, $n = 2$ 分波较之 $n = 0$ 各分波小得完全可以忽略不计.因而略去它们是完全合理的.但在弱耦合时,高次分波则不可忽略.

六、位形空间波函数

位形空间波函数可由动量空间波函数作四维富氏变换,然后取等时极限而得

$$\chi(X) = \int d^4P \chi(P) e^{i(P \cdot X)} \quad (35)$$

X 是无量纲的, X_μ 为四维位形空间的坐标矢量(长度一律以层子康普顿波长 $1/M$ 为单位),代入(15)式完成角度积分后有^[1]

$$\chi_n^{(i)}(X) = 4\pi^2 \sum_n C_n^i(\cos \theta'') \int_0^\infty i^n \frac{J_{n+i}(PX)}{PX} \chi_n^{(i)}(P) P^3 dP \quad (36)$$

θ'' 为 \mathbf{X} 与第四轴的夹角, J_{n+i} 为贝塞尔函数,取等时极限($X_4 = 0$ 或 $\theta'' = \pi/2$),就得到三维空间的矢介子波函数

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{x}) = \{ & iI_\mu^{(1)}(\mathbf{x}) + BI_\mu^{(2)}(\mathbf{x})\gamma_4 + I_{\mu\nu}^{(3)}(\mathbf{x})\gamma_\nu + iBI_{\mu\nu}^{(4)}(\mathbf{x})\sigma_{4\nu} \\ & + I^{(5)}(\mathbf{x})\gamma_\mu - iBI_\rho^{(6)}(\mathbf{x})\epsilon_{\mu\rho\tau 4}\gamma_\tau\gamma_5 + iBI^{(7)}(\mathbf{x})\sigma_{\mu 4} \\ & + iI_\nu^{(8)}(\mathbf{x})\sigma_{\mu\nu} \} f_\mu \end{aligned} \quad (37)$$

这里

$$I_\mu^{(1),(6)}(\mathbf{x}) = i8\pi^2 \frac{x_\mu}{x^2} \int P^3 dP J_2(Px) F_0^{(1),(6)}(P)$$

$$\begin{aligned}
 I_{\mu}^{(2),(8)}(\mathbf{x}) &= -48\pi^2 \frac{x_{\mu}}{x^3} \int P^2 dPJ_2(Px) F_1^{(2),(8)}(P) + 16\pi^2 \frac{x_{\mu}}{x^2} \int P^3 dPJ_1(Px) F_1^{(2),(8)}(P) \\
 I_{\alpha\beta}^{(3),(4)}(\mathbf{x}) &= \delta_{\alpha\beta} \frac{8\pi^2}{x^2} \int P^3 dPJ_2(Px) F_0^{(3),(4)}(P) - x_{\alpha}x_{\beta} \frac{8\pi^2}{x^3} \int P^4 dPJ_3(Px) F_0^{(3),(4)}(P) \quad (38) \\
 \mu &= 1, 2, 3, 4 \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\
 I_{\alpha,4}^{(3),(4)}(\mathbf{x}) &= 0 \\
 I^{(5),(7)}(\mathbf{x}) &= \frac{4\pi^2}{x} \int P^2 dPJ_1(Px) F_0^{(5),(7)}(P)
 \end{aligned}$$

可以利用 (37), (38) 如 [1] 算出 $Tr[\chi^+(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})]$, 然后计算相应的介子均方半径. 减小 E 值可以得到“胖”的 ρ 介子, 与 0^- 介子的情形类似, 因为 E 的减小伴随着阱的增宽. 但如图 1 所示, 减小 E 值时有一个与赝标介子耦合常数的协调问题, 而且真实的 ρ 介子波函数有待于不仅给出合理的半径还要能说明其它的物理事实, 这有待于进一步的研究.

计算精度要求最后两次迭代求出的特征值的相对误差小于 10^{-3} . 计算用 24 个高斯点.

感谢朱洪元先生与我们经常进行的讨论和有益的意见.

参 考 资 料

- [1] 洗鼎昌, 郑希特, 王明中, 汪克林, 章正刚, 相对论性层子模型中的介子结构波函数, 物理学报(待发表).
- [2] 洗鼎昌, 汪克林, 章正刚, 郑希特, 王明中, 层子间近平底势作用下的介子波函数, 物理学报(待发表).
- [3] G. C. Wick, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1124.
- [4] A. Guth, *Ann. Phys.*, (N. Y.), **82** (1974), 407.
- [5] 北京大学理论物理研究室基本粒子理论组, 中国科学院数学研究所理论物理研究室, 北大学报, **2** (1966), 103.
- [6] 中国科学院原子能研究所基本粒子理论组, 原子能, **3** (1966), 137.

THE WAVE FUNCTION OF VECTOR MESON BOUND STATE THROUGH SCALAR COUPLING

WANG MING-CHUNG CHENG HSI-TEH

HSIEN TING-CHANG

(*Chengtu Institute of Technology*) (*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

WANG KE-LIN

CHANG CHENG-KANG

(*Chengtu Institute of Geology*)

ABSTRACT

The wave function of the vector bound state of a spinor straton-antistraton pair through scalar coupling is discussed. The Bethe-Salpeter equation of the bound state is solved numerically, and the structural wave functions of the vector bound state are given corresponding to different selection of the parameters of the kernel. The magnitude of various invariant functions of the wave function is determined. The validity of the Bargman-Wigner approximation is also examined.

附表 $\left(\frac{4\pi^3}{K^2} \mathcal{Y}_{ln}^{i_1 i_2}\right)^{(*)}$

i_1, n i_2, n	1,0	1,2	2,1	3,0	3,2
1,0	$\frac{K}{P}(M^2 - P^2 - Q^2)L_1E_{20}$	$\frac{K}{3P}(M^2 - P^2 - Q^2)[L_3(12E_{22} - 2E_{20}) - L_1E_{20}]$	$-4KMQL_2E_{22}$	$-\frac{MK^2}{2}(L_0 + 3L_2)E_{20}$	$-MK^2\left[L_2(E_{22} - E_{20}) - \frac{1}{6}L_0 \cdot E_{20} + L_1\left(7E_{22} - \frac{5}{6}E_{20}\right)\right]$
1,2	$\frac{K}{P}(M^2 - P^2 - Q^2) \cdot L_1 \cdot (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K}{3P}(M^2 - P^2 - Q^2)[L_3(48E_{24} - 20E_{22} + 2E_{20}) - L_1(4E_{22} - E_{20})]$	$-4KMQL_2(4E_{24} - E_{22})$	$-\frac{MK^2}{2}(L_0 + 3L_2) \times (4E_{22} - E_{20})$	$-MK^2\left[L_4\left(28E_{24} - \frac{31}{3}E_{22} + \frac{5}{6}E_{20}\right) + L_2(4E_{24} - 5E_{22} + E_{20}) - \frac{1}{6}L_0(4E_{22} - E_{20})\right]$
2,1	0	0	$\frac{4K}{P}(M^2 + P^2 - Q^2)L_2E_{22}$	$-\frac{4K^2Q}{P}L_2E_{22}$	$\frac{2K^2}{PQ}\{(M^2 + Q^2 + P^2)(L_2 - L_4)E_{22} - Q^2[L_4(8E_{24} - 3E_{22}) - L_2E_{22}]\}$
3,0	$\frac{2KM}{P}L_1E_{20}$	$\frac{2KM}{3P}[L_3(12E_{22} - 2E_{20}) - L_1E_{20}]$	$-4KQL_2E_{22}$	$\frac{K^2}{2}\left\{2\frac{(M^2 - P^2 + Q^2)}{P^2} \cdot L_2E_{20} + (L_2 - L_0)E_{20}\right\}$	$\frac{K^2}{2}\left\{\frac{M^2 - P^2 + Q^2}{P^2}[8L_4E_{22} - (L_4 + L_2) \cdot E_{20}] + 2(L_4 - L_2)E_{22} - \frac{1}{3}(L_4 - L_0)E_{20}\right\}$
3,2	$\frac{2MK}{P}L_1(4E_{22} - E_{20})$	$\frac{4MK}{P}\left\{L_3\left[8E_{24} - \frac{10}{3}E_{22} + \frac{1}{3}E_{20}\right] + L_1\left(\frac{2}{3}E_{22} - \frac{1}{6}E_{20}\right)\right\}$	略	$\frac{K^2}{2}\left\{2\frac{(M^2 - P^2 + Q^2)}{P^2} \cdot (L_2 + L_4 - L_0) \cdot (4E_{22} - E_{20})\right\}$	$\frac{K^2}{2}\left\{\frac{M^2 - P^2 + Q^2}{P^2}[8L_4(4E_{24} - E_{22}) - (L_4 + L_2)(4E_{22} - E_{20})] + 2(L_4 - L_2)(4E_{24} - E_{22}) - \frac{1}{3}(L_4 - L_0)(4E_{22} - E_{20})\right\}$
4,0	$-\frac{2K}{P}L_1E_{20}$	$-\frac{2}{3}\frac{K}{P}[L_3(12E_{22} - 2E_{20}) - L_1E_{20}]$	0	$-\frac{K^2M}{2P^2}(L_0 + 3L_2)E_{20}$	略

(*) 表中 $E_{ab} = \int_0^{\pi} d\theta (\sin \theta)^a \cdot (\cos \theta)^b \cdot F(P, Q)$

续一

$\begin{matrix} i, n' \\ i, n \end{matrix}$	1,0	1,2	2,1	3,0	3,2
5,0	0	0	0	$\frac{K^2}{4} (M^2 + P^2 + Q^2) \cdot (L_0 - L_2) E_{20}$	$\frac{K^2}{4} (M^2 + P^2 + Q^2) \left[-L_4 (E_{22} - \frac{1}{6} E_{20}) + L_2 E_{22} - \frac{1}{6} L_0 E_{20} \right]$
5,2	0	0	0	$\frac{K^2}{4} (M^2 + P^2 + Q^2) \cdot (L_0 - L_2) (4E_{22} - E_{20})$	$\frac{K^2}{4} (M^2 + P^2 + Q^2) \left[-L_4 (4E_{24} - \frac{5}{3} E_{22} + \frac{1}{6} E_{20}) + L_2 (4E_{24} - E_{22}) - \frac{1}{6} L_0 (4E_{22} - E_{20}) \right]$
6,0	0	0	0	$-\frac{K^2}{2} (L_0 - L_2) E_{20}$	略
7,0	0	0	0	$\frac{K^2}{2} M (L_0 - L_2) E_{20}$	$K^2 M \left[-L_4 \left(E_{22} - \frac{1}{6} E_{20} \right) + L_2 E_{22} - \frac{1}{6} L_0 E_{20} \right]$
8,1	0	0	0	0	0

